Российская Академия Наук
Институт философии

М.М.Новосёлов

ЛОГИКА АБСТРАКЦИЙ

(методологический анализ)

Часть вторая

Москва
2003

ББК 87.4
УДК 162.6
Н 76

В авторской редакции

Рецензенты
доктор филос. наук *А.С.Карпенко*
Кандидат физ.-мат. наук *З.А.Кузичева*

Н 76 **Новосёлов М.М.** Логика абстракций (методол. анализ). — Ч. 2. — М., 2003. — 155 с.

Монография является продолжением части 1-й под таким же названием (ИФ РАН, 2000 г.). Сохраняя тему интервального анализа абстракций, как в прикладной, так и в теоретической области познания, автор переносит акцент с общих вопросов формирования и смысла абстракций, рассмотренных в первой части, на вопросы формирования их логических моделей. При этом обсуждаются и некоторые другие проблемы, в частности, некоторые проблемы оснований логики и математики.

ISBN 5-201-02099-2

ПРЕДИСЛОВИЕ[1]

Логика есть царство неожиданности. Мыслить логически значит непрерывно удивляться.

О.Э.Мандельштам, «Камень»

Возможно, библиограф испытает неудобное чувство раздвоенности, отвечая на вопрос, в какую рубрику занести эту книгу, по какому ведомству её числить — по ведомству логики или по ведомству философии?

Нет сомнений, что её можно зачислить по ведомству логики, в кластер «понятие» или в кластер «умозаключение». Но если у библиографа только один экземпляр, то я советую зачислить этот экземпляр по ведомству философии, в кластер «размышление», тем более, что я давно склоняюсь к тому, чтобы саму философию рассматривать как искусство размышления.

Да, да, именно искусство.

В частности, и в его эстетическом смысле. Разве и теперь ещё мы не испытываем эстетическое наслаждение от обертонов мысли в диалогах Платона?

Это уже потом кто-то перепутал философию с мировоззрением.

При таком подходе мы теряем понятие ***научного мировоззрения***. Мировоззрение може быть научным, но не только научным. Оно может быть философским, религиозным, мистическим и ещё неведомо мне каким. Мировоззрение получает имя по преобладающей составляющей. Научное мировоззрение даётся преимущественно наукой. А те, кто смешал философию с мировоззрением, философию-то как раз наукой и не считают. Существенно и то, что в основе научного мировоззрения лежит ***не истина, а метод*** научной работы, так сказать методология поиска истины, хотя разрешить дилемму «наука или не наука», ссылаясь на одни только методы, конечно, нельзя.

Извечный философский вопрос: «Что есть истина?». И для ответа на этот вопрос философ может предложить только один метод — размышление.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РГНФ; грант № 01-03-00381.

Не случайно для европейского сознания философия начиналась как искусство мыслить, размышлять, ставить вопросы и отвечать на них. Первоначплньно — скорее мифически (а то и мистически) чем научно, поскольку и науки-то догдашнее человечество не знало.

Позднее пробуждающаяся наука захватила философию в единый поток познания. Но и тут размежевание было ясное. Философия занялась познанием вечного и непреходящего в природе и духе (Платон) или же причинами сущего, взвалив на себя роль науки о принципах — метафизики, как назвали её наследники Аристотеля. Но при этом Аристотель уже понимал философию как рефлексию, добавляя, что философия — это наука, которая ищет себя.

А когда молодое и заносчивое естествознание стало срамить метафизику (Галилей), для философии придумали новую роль. Лейбниц сравнил философию с деревом, корень которого метафизика (как наука о принципах), а ветви — специальные отрасли научного знания.

Аристотелевская идея принципа спасала философию во все века. Никто точно не знал что, собственно, следует именовать принципами, и как отделить хорошие принципы от плохих. Но идея завораживала. И оставалось только воспользоваться искусством размышления, разъясняя и прилагая, казалось, вечные истины: «ничто не возникает без причины», «подобное познаётся (излечивается) подобным», «совершенным может быть только движение по окружности» — догма об окружности, которая прожила много столетий, и пр. Схоластика прибавила к ним «принцип индивидуации», а Лейбниц — «принцип достаточного основания».

Гегель ближе других подошёл к простому и ясному пониманию философии как ***обдуманному рассмотрению предметов***. В этом её качестве философия также необходима науке, как наука философии.

И неважно, из какой области будут предметы.

В любом случае главный предмет философии — ключевые моменты познания, к которым человеческое сообщество (и учёный мир в том числе) возвращается время от времени, независимо от того, как далеко оно продвинулось в своём историческом развитии. Но познание требует понимания, а понимание — это функция наших интеллектуальных способностей.

Отсюда вопрос о доверии к познанному и, следовательно, к познанию вообще. А это проблема критериев, то есть того, «пользуясь чем... вот это мы считаем установленным истинно, а вот это — ложно» (Секст Эмпирик).

Тут мы опять возвращаемся к методам и средствам познания, то есть к тому, что философия вынуждена разделять с наукой. И в этой своей части она сама наукой становится. Даже сама первая философия, теория познания, на наших глазах эволюционирует в ***теорию представления знаний*** — формальный информационный аналог извечных философских исканий.

Логика — это философия, ставшая наукой. Это техника мышления. А те, кто размышлял над тем, как обустроить эту технику, несомненно, были философами, несмотря на то, что самые выдающиеся из них (например, Гильберт или даже Брауэр) полагали, что в области их научных исканий «не нужно никакого детального философского анализа» (Г.Крайзель).

Их философия, как и всякая философия, «основана на разуме и теснейшим образом связана с личностью» (В.И.Вернадский). Не без влияния этих выдающихся личностей мы обрели возможность выбирать между классической, интуиционистской, конструктивной, ультраинтуиционистской или какой-либо иной логикой. И вместе с тем мы понимаем, что каждая из них обязана философским поискам, что бы они сами об этом ни думали.

Разумеется, сказанное выше лишь косвенно связано с основным содержанием этой книги. Его цель — оправдать философский характер, как её первой части (М., ИФРАН, 2000), так и этой второй. Никто ведь не скажет, прочитав эту книгу, что она имеет какое-то отношение к высокому понятию «мировоззрение». Но к философской логике (в том числе и к её математическому направлению) она определённое отношение имеет.

Математическое направление в логике утвердилось не вдруг. Его пионеры пережили не одну минуту тревоги, как выразился Дж.Буль. Главным идейным противником применения математических методов к системе логических понятий был психологизм, который воспринял математизацию логики как своего рода возрождение схоластики, менее всего способное поставить логические исследования на научный фундамент. Но в этом его убеждении психологизм был антиисторичен. К концу 19-го началу 20-го века борьба за математизацию для логики была равносильна борьбе за существование. Она привела к мощному внутреннему развитию логики как науки, а затем, почти вскоре, и к экзотерическому её развитию в контексте проблем обоснования математики.

За последние сто лет логика разрослась в совокупность научных теорий, едва ли отличимых от самых абстрактных областей математики. И, как это нередко бывает, её творческое развитие вновь поставило вопрос о связи психологии и логики как «психодинамики познания» (Н.Грот). Первой косвенной защитой этой связи послужили установки сигнифики и интуиционизма, а к середине 20-го столетия антагонизм психологизма и логицизма должен был уступить идее сотрудничества на основе новейших исследований по моделированию познавательных процессов[2].

Как известно, главная задача логики — разыскание и систематическое описание логических законов. Узкий смысл этого понятия (три общезначимых аксиомы), характерный для традиционной логики, давно уже потерял прежнюю свою философскую значимость. Зато собственно логическая роль законов логики существенно возросла. Изучение логических законов образует естественный исходный пункт логического анализа приемлемых («хороших») способов рассуждений (умозаключений), поскольку само понятие «приемлемое рассуждение» уточняется через понятие «логический закон».

Чтобы обозреть совокупность логических законов, в принципе бесконечную, требуются формальные теории (или исчисления), в которых интуитивные понятия о законах логики реализуются в точном понятии «общезначимой формулы».

Конечно же, тип формальной теории (исчисления) не является делом произвольного выбора, а подсказывается и определяется ***логикой фактов***, о которых мы рассуждаем и нашей субъективной уверенностью в том или ином характере этой логики. Однако при этом следует помнить, что переводя информацию о фактах на язык теории, мы привыкаем оценивать истинность суждений о фактах по их истинности в языке соответствующей теории, то есть по истинности их переводов. Следовательно, семантику языка фактов и семантику языка теории мы рассматриваем обычно так, как если бы они не различались, даже если мы не забываем о сделанном переводе, о ***погружении фактического в теоретическое***, о редукции семантики фактов к семантики их теоретических описаний. А к этому научное познание стремится всегда.

Хотя определённая независимость эмпирических фактов от их теоретических описаний неоспорима, сам по себе «чистый факт» никогда не устраивал научное познание. Оно старалось «уложить» содержание факта в контекст определённого теоретического понимания. Поэтому поиск объективности (истины) в науке в той или иной степени связан с «устранением» данных, противоречащих «рациональной модели», претендующей на эту объективность. Для интервальной семантики — это ***проблема независимости***, о которой подробно говорилось в первой части этой книги.

---

[2] Подробнее: *Бирюков Б.В.* Человеческий фактор в логике в свете проблемы «искусственного интеллекта» // Кибернетика и диалектика. М., 1978.

Но любая теория — это не только язык. Это явная (а чаще неявная) система абстракций (обычно говорят — идеализаций), порождающих семантику понятий, в чём-то непременно отличную от семантики фактов. Вот почему всегда полезно помнить о ***правилах редукции***, порождающих представления о реальности с точностью до издержек её теоретического описания. Ведь положенные в основу такого описания абстракции, могут быть очень и очень различны.

В этой книге из всех возможных абстракций я выбираю для обсуждения только те, что были обозначены в её первой части. Там была заявлена новая область исследований, которую я назвал логикой абстракций. В первой книге подразумевалась логика в её гносеологическом смысле как необходимая связь понятий. Во второй книге — это уже логика в собственном смысле как логика суждений. И в одной, и в другой книге я стремился избежать обычного упрёка в неточности, который так часто адресуют в адрес философии. Об этом красноречиво высказался когда-то Г.Клейнпетер: «О точном знании говорят тогда, когда самым тщательным образом перечислены все условия его значимости и не допущено ни одной скрытой предпосылки. Это именно обстоятельство и служит причиной того, что большинство философских рассуждений не обладает характером точности; они всегда заключают в себе ряд скрытых, не выдвигаемых явно, предпосылок, что в большинстве случаев ведёт ещё, помимо всего прочего, и к внутренней противоречивости выводов».

Читателю судить, удалось ли мне добиться достаточной точности в изложении рассматриваемых тем и избежать при этом противоречий. За все критические замечания, присланные или высказанные устно в адрес этой и предыдущей книги, я буду искренне признателен читателю.

Я заранее приношу читателю мои извинения за возможные длинноты в изложении некоторых вопросов. И всё же позволю себе воспользоваться фразой Анри Лебега, чтобы их оправдать: Excuser-moi d'être long, j'ai essayé d'être clair.

Я сожалею, что далеко не всё задуманное, что так необходимо для репрезентативной теории абстракций, удалось мне пока осуществить. За рамками этой книги (в черновых вариантах) остались многие поставленные, но неразрешённые вопросы теории познания и логики.

Наконец, в заключение я хочу поблагодарить рецензентов этой книги и сотрудников сектора эволюционной эпистемологии ИФ РАН, прочитавших рукопись, за благосклонное к ней отношение.

ГЛАВА 1. АБСТРАКЦИЯ И ЛОГИКА ОБОСНОВАНИЯ

> В любой сфере науки должна со временем появиться область «оснований этой науки», ставящая своей целью не расширение и применение знаний, относящихся к предмету этой науки, а их критику, обоснование или видоизменение.
>
> *А.С. Есенин-Вольпин*

1.1. Немного о логике

Слово «логика» в его современном употреблении многозначно, хотя и не столь богато смысловыми оттенками, как древнегреческое слово «logos», от которого оно происходит. Тем не менее, в духе традиции, с термином «логика» связывают и теперь ещё три основные идеи:

1) идею необходимой связи явлений объективного мира; и тогда говорят обычно о «логике вещей» (к примеру: «логика вещей сильнее логики человеческих намерений») или о «логике хозяйственных отношений», или о «логике политической борьбы» и пр., и пр.;

2) идею необходимой связи понятий, посредством которых познаются «сущность вещей и истина», и тогда говорят о «логике познания»;

3) наконец, идею ***доказательств*** и ***опровержений***.

Последнее и относится к предмету логики в её собственном (основном) значении, хотя понятия «доказательство» и «опровержение» могут при этом пониматься по-разному в зависимости от предъявляемого к их рассмотрению уровня строгости и даже от философских установок. В любом случае логика остаётся наукой, помогающей решать некоторые интеллектуальные задачи на доказательство, если для этого имеются достаточные предпосылки.

Говоря предварительно и нестрого, в логике обычно имеют в виду необходимую связь суждений (высказываний) в рассуждениях (умозаключениях), принудительная убедительность («общезначимость») которых вытекает (следует) только из ***формы*** этой связи безотносительно к тому, будут ли эти суждения истинны или ложны. Именно тогда, когда акцент делается на форме связи суждений и её необходимом характере, подразумевают, что речь идёт о логике в собственном смысле как дедуктивной науке о методах доказательств и опровержений или, иначе, как об аналитической (формальной, по определению Канта) теории способов рассуждений.

Признак «логический» в смысле «относящийся к правилам доказательства» впервые употребил греческий философ Демокрит. Но в качестве научной теории, изучающей такие способы рассуждений, которые от истины всегда приводили бы к истине, логика является изобретением другого греческого философа — Аристотеля. Во времена Аристотеля греки особенно увлекались ***диалектикой*** — искусством «спрашивать и отвечать». Изобретателем диалектики, по свидетельству Аристотеля, был философ Зенон Элейский. Он сформулировал несколько трудных задач — ***апорий***, которые и в наше время остаются предметом обсуждения[1]. Искусными диалектиками были философы Сократ и Платон. В диалектике вопросы и ответы должны были служить одной цели — прояснять «суть дела», помогать найти истину. Мы и теперь ещё говорим, что «в споре рождается истина». Этому служили, в частности, первые пробные аргументы мегарской школы. Её основатель Евклид, по примеру Зенона, употреблял косвенные доказательства для опровержения противных ему философских воззрений.

Правда, для греков диалектика была своего рода «олимпийской игрой» для ума — не прикладным, а чистым искусством. Когда же образование сделалось целью преподавания, возникла новая школа — антиподом диалектики стала ***софистика***. Опираясь на ту же практику диалогического спора, софисты стремились преобразовать технику спора в некий предмет обучения, представить его как искусство «словесного проворства», целевой функцией которого являлась бы не истина, а формальная или юридическая победа. Самый вопрос о постижении истины посредством спора софисты ставили под сомнение. Они выдвинули принципиально иную цель дискуссии — успех и практическую выгоду, даже если при этом наихудший аргумент приходится защищать как наилучший с помощью различных уловок в речи и в рассуждении. При этом они стремились создать видимость доказательства при очевидной неверности (порой абсурдности) результата за счёт хорошо замаскированных ошибок.

---

[1] См., к примеру: *Яновская С.А.* Преодолены ли в современной науке трудности, известные под названием «апории Зенона»? // Проблемы логики. М., 1963.

Стоит, однако, заметить, что понятия «ошибочное рассуждение» в то время ещё не существовало. Но скандальная деятельность софистов провоцировала интерес к формальной и технической стороне диспута, к изучению и систематизации таких приёмов рассуждения, которые впоследствии (когда возникла логика) получили название логических ошибок — ***паралогизмов*** (если ошибка не была преднамеренной) и ***софизмов*** (если ошибка делалась сознательно). Так постепенно из двух противоположных «интеллектуальных игр» — диалектики и софистики — выявлялся характер мнимых доказательств и формировались основы научной теории доказательств (аподейктики).

Первыми, усвоившими важность теоретического анализа софизмов, были, по-видимому, сами софисты. Учение о правильной речи, о правильном употреблении понятий софист Продик считал важнейшим. Разбор и примеры софизмов представлены и в диалогах Платона. Но систематический анализ софизмов, основанный уже на некоторых элементах научной теории умозаключений, принадлежит Аристотелю. С софистов начинается риторический дискурс, с Аристотеля — логический. «Топика» и «О софистических опровержениях» — самые ранние логические сочинения Аристотеля, в которых исследуются диалектические и софистические способы рассуждений.

Вот какой вывод из всего дальнейшего развития этих идей сделал выдающийся голландский математик и логик Эверт Бет: «Диалектика, — писал он, — с самого начала её возникновения разделилась на три основных учения, из которых только одно развивалось неуклонно и непрерывно, так что в наши дни только одна логика представляет собой солидную конструкцию, важность которой для научной мысли не может быть всерьёз поставлена под сомнение. Искусство спора и метафизика, напротив, демонстрируют худшие черты старения и как будто бы осуждены влиться в логику»[2].

Исторически было как раз так, что предмет собственно логики (формальной логики) ограничивался каталогизацией ***правильных аргументов***, то есть таких способов рассуждений (умозаключений), которые позволяли бы из истинных «суждений-посылок» ***всегда*** получать истинные «суждения-заключения». Таким образом, в этом смысле, представляя логические основания для ***корректности*** нашей мысли (в ходе рассуждений, выводов, доказательств, опровержений и пр.), логика стала именоваться «наукой о правильном мышлении». Однако в ходе её современного развития реальная область применения логики как теории определённого вида абстрактных структур

---

[2] См.: Dialectica. № 6. 1948. P. 117-118.

(первоначально в форме так называемых булевых алгебр) оказалась значительно шире: это вычислительная математика и электроника, информатика и психология, лингвистика и экономика, и пр.

И всё же основная задач логики — каталогизация правильных аргументов (правильных форм рассуждений). Известным со времён античности набором таких аргументов определился так называемый ***процесс дедукции*** (от лат. deductio — выведение), то есть процесс движения мысли «от общего к частному», когда началом (***посылками***) рассуждения (умозаключения) полагают какие-либо основополагающие истины (аксиомы, постулаты, нормы морали и права или просто гипотезы), имеющие характер ***общих утверждений*** («общее»), а его концом — логические следствия из посылок, теоремы («частное»). Таким образом, дедукция — это цепь умозаключений (рассуждение), все звенья которой связаны отношением ***логического следования***.

Исторически первый набор дедуктивных аргументов предоставила науке ***силлогистика*** — теория логического вывода, созданная (Аристотелем) ещё за три столетия до нашей эры. Этот набор долгое время был единственным, с которым связывали представление о логике. Но по мере изучения особенностей демонстративного мышления этот набор постепенно расширялся за счёт несиллогистических, хотя и дедуктивных способов рассуждения. Так появилась ***логика высказываний***, контуры которой были заложены в той же античности философской школой стоиков.

Вместе с тем параллельно изучению дедуктивного движения мысли от общего к частному шло изучение своего рода обратного процесса — умозаключения «от частного к общему», от фактов к некоторой гипотезе (общему заключению), названного ***индукцией*** (от лат. inductio — наведение). Поскольку последняя выпадала из рамок логики как дедуктивной теории (или совокупности таких теорий), она в конце концов сделалась предметом особой теории, названной ***индуктивной логикой***. Истоки этой логики также восходят к античности, в частности к философской школе Эпикура[3].

Формальная логика в её современном виде заметно отличается от логики предшествующих эпох. Правда, она остаётся историческим приемником традиционной, так называемой школьной, логики, упростившей, но в основном сохранившей теорию Аристотеля. В отличие от традиционной, современная логика в полном смысле формальна. Для неё характерны различного рода ***формализованные тео-***

---

[3] См.: *Lesniak K.* Filodemosa tractat o indukcji // Studia Logica. T. 2. 1955.

рии логического вывода в виде ***логических исчислений***, позволяющие сделать логические аргументы (формы умозаключений) предметом по-настоящему строгого (по существу математического) анализа и тем самым полнее описать их свойства. А благодаря разнообразию неэквивалентных исчислений логика из «чёрно-белой» стала «цветной».

Отображение логической мысли в логических исчислениях естественно привело к более адекватному, чем это было в эпоху античности и во все эпохи, предшествовавшие 20 в., представлению о «логосе» как единстве языка и мышления, В современной логике это представление столь очевидно, что, исходя из различных «формализмов», можно говорить о различных ***стилях логического мышления***.

Определив логику как науку о доказательстве, естественно сказать несколько предварительных слов о том, что такое ***доказательство***[4]. Это понятие можно толковать в широком и узком (собственном) смысле. В широком смысле под доказательством нередко понимают всё то, что убеждает в истинности чего-либо, в том числе (но не обязательно) и системы рассуждений с интуитивно значимым характером аргументов, законность которых является вопросом субъективной установки.

Так, когда говорят о доказательстве в криминалистике, прежде всего имеют в виду фактические, так называемые вещественные данные о любых обстоятельствах, имеющих значение для правильного разрешения уголовного или гражданского дела. Доказательством в этом смысле служат свидетельские показания, заключения экспертов и тому подобные вещи, убеждающие непосредственно, хотя и в этом случае многое обосновывается также рассуждением, использующим логику, поскольку любой анализ фактического материала требует применения определённых логических схем рассуждений.

В судебной или адвокатской практике роль дедуктивной логики более ощутима, хотя по мнению английского философа и математика Бертрана Рассела, рассуждения юристов, несмотря на то, что по сути своей эти рассуждения дедуктивны, они всё же «редко предстают в строгой логической формулировке и обычно включают некоторые эмпирические соображения до и после общих посылок»[5]. Между тем, замечает Рассел, юридические нормы вытекают из общих принципов, и судьи должны уметь применять их к конкретным обстоятельствам.

---

[4] Подробно и неформально об этом см. ст. «Доказательство (в формальной логике)» // Философская энциклопедия. Т. 2. М., 1962. (Авторы: *Б.В.Бирюков* и *А.С.Есенин-Вольпин*).

[5] *Рассел Б.* Искусство мыслить. М., 1999. С. 36.

Замечу, однако, что сами адвокаты и судьи не всегда держатся такого мнения. Признавая, что вопрос о судебных доказательствах собственно не юридический, а принадлежит к области логики, они при этом имеют в виду только индуктивные методы (и индуктивную логику соответственно), полагая, что для дедукции вообще нет места в судопроизводстве[6].

Как бы там ни было, но по существу логические правила — это общезначимые нормы для корректного мышления. Они сравнимы с юридическими нормами, которые должны руководить поведением всех граждан государства.

Но, как не все люди, к сожалению, руководствуются юридическими нормами в своём поведении, так и не все люди руководствуются правилами (нормами) и законами логики в своём мышлении. Конечно, все мы так или иначе причастны к искусству рассуждения, поскольку нам приходится рассуждать самим или выслушивать (анализировать) рассуждения других. Тут мы имеем дело с врождённой суммой правил, «которая вперёд идёт у каждого человека, которую мы находим в своём сознании прежде, нежели начинаем рассуждать»[7]. Но в большинстве случаев эта причастность является стихийной, интуитивной без ясного понимания основ, без системы необходимых правил, которые бы оправдывали общезначимость хода рассуждения, перехода от одних суждений к другим.

Хорошо это или плохо — это другой разговор. Многое, конечно, зависит от контекста, в котором протекает процесс мышления. Однако, как заметил Джавахарлал Неру, важно отдавать себе отчёт в том, что «хотя порой удаётся различить логический ход мыслей человеческого разума, тем не менее... разум отдельного человека представляет собой клубок противоречий, и его действия трудно примирить между собой»[8].

Мышление — это функция нашей сознательной жизни. Оно имеет принудительный характер. Нельзя волевым решением отказаться от мышления — не думать вообще, поскольку это непроизвольный физиологический и психологический акт. Но при этом течение мыслей может быть слабо или вовсе неорганизованным. Организованное мышление предполагает некоторую структурированность и при-

---

[6] *Спасович В.Д.* О теории судебно-уголовных доказательств. М., 2001. С. 9.

[7] *Герцен А.И.* Собр. соч. Т. 2. М., 1954. С. 153.

[8] *Неру Дж.* Открытие Индии. Кн. 1. М., 1989. С. 279.

нудительность отдельных его шагов. И если эта принудительность отвечает определённой задаче — от истинных мыслей всегда приходить к истинным мыслям, то такая принудительность должна быть логической: она должна выражать связь мыслей по определённым фиксированным правилам (нормам), отражающим соответствующие закономерности мышления, движения мысли от истины к истине.

Вот что в связи с таким пониманием логики писал один из основателей современной (математической) логики немецкий логик Готлоб Фреге: «Слово «прекрасное» направляет эстетику, слово «доброе» – этику, а слово «истинное» — логику. Конечно, истина является целью любой науки; но логика связана с ней совсем иным способом. Логика соотносится с истиной примерно так же, как физика — с тяготением или с теплотой. Открывать истины — задача любой науки; логика же добивается познания законов истинности»[9].

Соглашаясь в принципе с этой мыслью Фреге, я всё же замечу, что логика изначально была слугой двух господ: истины и интереса.

Логика служанка истины, поскольку она оберегает и сохраняет истину, если мы рассуждаем правильно, исходя из истинных положений. Однако она не спрашивает нас «что есть истина?». Если истина есть и мы доверяем её логике, то логика гарантирует нам её сохранность в арсеналах своих аксиом, теорем и правил. Но в то же время логика служанка интереса, поскольку мы вполне можем пренебречь истинностью своих посылок (исходных положений) и, следуя одной только логике, сохранить правильный ход мыслей, побеждая, таким образом, наших оппонентов их логичностью.

Вернёмся, однако, к нашему первому определению логики. В этом определении использовалось понятие умозаключения. Отмечу теперь, что умозаключение по результату сходно с логическим выводом, но, вообще говоря, ему не тождественно. Логический вывод, в отличие от умозаключения, строится с опорой на внешние средства путём знаковой записи мыслей и их связей в подходящем формальном языке (языке исчисления) с целью свести до минимума «подсознательные» элементы вывода. Кроме того, нормы, определяющие законность умозаключения, не обязательно должны быть нормами дедуктивного вывода. Но процесс умозаключения, равно как и логический вывод, непосредственно связан с процессом познания. И дедуктивное умозаключение — это одно из действий, обогащающих наше познание. Это случается, в частности, тогда, когда из имеющихся в нашем распоряжении сведений мы хотим извлечь необходимую

---

[9] *Фреге Г.* Логические исследования. Томск, 1997. С. 22.

нам информацию, полагаясь только на нашу собственную способность к рассуждению. При этом наша мысль строится примерно так: положим, что из гипотезы α путём вполне хорошего, на наш взгляд, размышления мы пришли к заключению β. Тогда каждый из нас, естественно, подумает: если мне удастся каким-либо образом выяснить (доказать), что α истинное предложение, то и предложение β я смогу тоже считать истинным. Это обычный путь рассуждения не только в науке, но и в повседневной жизни. Следовательно, выяснение вопроса о том, когда одно предложение «влечёт» другое, открывает чисто теоретическую возможность познания. Разумеется, существует множество других (и порой очень убедительных и важных примеров) тому, что изучение «техники мышления» совершенно необходимо в целях выработки тех элементарных логических навыков, которые требуются для умозаключений, претендующих на получение истинных результатов познания.

Изучение логических правил умозаключений (знакомство со схемами логически правильных умозаключений) не гарантирует, конечно, от ошибок в самостоятельных рассуждениях. Однако оно повышает ***качество мышления***, степень сознательного контроля за правильностью рассуждения, позволяет, по крайней мере, предупредить явные ошибки логического характера. Знание правил логически правильных рассуждений воспитывает умение распознавать неверные умозаключения не только свои, но и умозаключения своих оппонентов. Тот, кто логически менее подготовлен, обычно совершает больше ошибок в самостоятельном мышлении и в своих умозаключениях, нежели тот, кто получил в логике достаточную тренировку.

1.2. Логика и аргументация

Понятие аргументации, равно как и понятие логики, может рассматриваться с различных точек зрения. В его содержании естественно резюмируется то, что люди думали о процессах интеллектуального общения, как они описывали дискурс и какие рациональные средства и системы изобретали, когда они размышляли о языке и актах коммуникации.

В античности аргументация — это опора спекулятивной мысли в качестве средства беседы, диалога, дискуссии. Аргументация зачислялась по ведомству диалектики и риторики и в известном смысле противопоставлялась доказательству. Диалектика понималась как искусство спора вообще, риторика — как искусство красноречия.

«соответствующее диалектике, так как обе они касаются таких предметов, знакомство с которыми может считаться достоянием всех и каждого, и которые не относятся к области какой-либо отдельной науки»[10].

Но поскольку обе означали способность находить те или иные ***способы убеждения*** относительно каждого обсуждаемого предмета, естественно возникал вопрос: каковы же вообще могут быть способы убеждения и какие из них допустимы, а какие недопустимы с точки зрения определённых, например нравственных, критериев?

Уже Платон отмечает разницу между понятием «убеждать» с помощью разумного (скажем сегодня — логически верного) довода, основанного на правилах, и понятием «внушать» с помощью доводов, которые могут и не основываться на правилах, — доводов, обращенных к сердцу, к чувству, к интуиции с целью, как говорит Аристотель, «привести ... в известное настроение ... расположить в свою пользу». Убеждение — дело философии, внушение — риторики и софистики. В этой связи Аристотель говорит о «коварной софистике».

Сам он идёт не только дальше Платона, но и уклоняется от абстрактной линии Платона, делая различие между «техническими» и «нетехническими» средствами убеждения. К последним он относит свидетельские показания (в суде), признания, сделанные по пыткой, письменные договоры и пр. Техническими Аристотель называет такие способы убеждения, которые созданы наукой с помощью определённого метода или же такие, которые связаны исключительно с нашей речевой практикой. Эти технические способы убеждения заключаются, по словам Аристотеля, в действительном или же кажущемся доказывании.

Разделение «доказывания» на ***действительное*** и ***кажущееся*** было поворотным пунктом в истории аргументации. В этом отношении Аристотеля можно считать первым теоретиком, осуществившим переход от расплывчатой идеи аргументации к строгому определению понятий, к отделению «аргументации вообще», когда касаются «тех вопросов ... относительно которых у нас нет строго определённых правил»[11], от точного понятия логического доказательства.

Даже в области риторики, говорит Аристотель, только доказательства существенны, поскольку «мы тогда всего больше в чём-либо убеждаемся, когда нам представляется, что что-либо доказа-

---

[10] *Аристотель.* Риторика // Античные риторики. М., 1978. С. 15.
[11] Там же. С. 21.

но»[12]. При этом формальную суть доказательства Аристотель отделял от содержательной истинности, входящих в него суждений, говоря, что «с помощью одной и той же способности мы познаём истину и подобие истины».

В этом пункте к Аристотелю близок Пирс, который отделяет суждение как логический информационный факт от его аргументативной характеристики, включающей самый акт утверждения или согласия с содержанием суждения или с оценкой его истинности или ложности[13].

Аристотель стал создателем первой научной теории доказательства, которую мы теперь, как уже говорилось выше, называем силлогистикой и которая (в несколько модифицированном виде) является неотъемлемым фрагментом современной формальной логики. Основная мысль Аристотеля заключалась в том, что умозаключение, чтобы считаться «хорошим» умозаключением и, таким образом логически приемлемым, должно быть ***общезначимым***, то есть не допускающим контрпримера.

Между тем, проблема общезначимости в строгом смысле разрешается только там, где возможна речь о логическом доказательстве. Взятая в более широком контексте, аргументация далеко не всегда отвечает условиям «принудительной строгости» такого доказательства. В общем случае законность аргументации «есть вопрос степени: она более или менее сильна. Вот почему она никогда не является замкнутой: всегда можно добиться её усиления, подбирая походящие аргументы»[14].

Правда, и в этом случае нам приходится следовать законам логики, подбирая аргументы таким образом, чтобы они согласовались между собой и избегая таких ситуаций, когда каждый аргумент, более или менее правдоподобный сам по себе, оказывается в противоречии с другими.

Вообще, появление формальной логики сильно повлияло на судьбу аргументации. Сведённая к искусству красноречия, аргументация потеряла кредит доверия со стороны точной науки, сохранив только статус интеллектуальной надстройки над дискурсом. В самом деле, связанная только с доводом, а не с правилом, аргументация по-прежнему остаётся оплотом софистики, поскольку, как отмечал Аристотель, софистом делаются не в силу какой-то особенной способности, а в силу намерения.

---

12 *Аристотель.* Риторика // Античные риторики. М., 1978. С. 17.

13 *Пирс Ч.С.* Элементы логики // Семиотика. М., 1983. С. 155.

14 *Blanché R.* Le raisonnement. Paris, 1973. P. 223.

Правда, за последний десяток лет отношение к значению и роли аргументации несколько изменилось. Теория аргументации возрождается в качестве ***методологии убеждения***. Возможно, этому способствовали обширные работы Хаима Перельмана, в которых он говорит о «новой риторике». Перельмана не занимают вопросы языковой структуры аргументации (что составляет предмет «общей риторики»[15]) или стилистики, или, скажем, логического синтаксиса. Он не говорит и о стандартизации процессов рассуждения. Его главная цель — анализ отношения «аудитория – оратор» с точки зрения существенных для этого отношения механизмов мысли, которые, как он считает, одни и те же во всех явлениях коммуникации. Аргументация призвана убеждать, а не принуждать к принятию тезиса. При этом вполне естественно, что теория аргументации помимо логически законных форм рассуждения, исследует и ассимилирует также и все такие формы, которые используются de facto в целях убеждения.

Декларируя те или иные принципы, мы не можем не учитывать область их применения и самый факт их применения, то есть прикладной аспект этих принципов. В этом контексте аргументация становится частью общей теории общения. Намечается новый путь: от философии и логики к психологии и теории информации. Изучение психологических механизмов убеждения может естественно влиять на выбор средств аргументации. В конечном счёте, сам по себе аргумент ничто, пока он так или иначе не истолкован, ведь именно человек обладает ключом к убеждающей власти аргументации[16].

Возникает, однако, вопрос: возможно ли и как усилить эту власть? Многие защитники теории аргументации полагают, что логики (именно они!) должны отправиться на поиски новых «доказывающих средств» в философии, в обществоведении, в политике, в повседневных дискуссиях, вообще в гуманитарных сферах человеческой деятельности. И отчасти этот процесс действительно идёт путём создания новых (неклассических) логик, совокупность которых можно было бы окрестить ***логикой гуманитарного знания***[17]. Учёт проблематики этих дисциплин был бы весьма полезен для всего корпуса знаний. Но их оформление в точную (неоспоримую) науку пока ещё далеко от завершения. Поэтому я оставляю поставленный выше вопрос без ответа и предлагаю сжатое, но приемлемое, на мой взгляд, определение аргументации:

---

[15] См.: Общая риторика. М., 1986.

[16] *Kapferer J.-N.* Les chemains de la persuasion. Paris, 1978.

[17] В этом контексте я обращаю внимание на две оригинальные работы: «О теории диспутов и логике доверия» и «О логике нравственных наук» (*Есенин-Вольпин А.С.* Избранное. М., 1999).

Аргументация — это искусство подведения оснований под какую-либо мысль или действие (обоснование их), способ убеждения кого-либо посредством значимых аргументов с целью их публичной защиты, побуждению к определённому мнению о них, признания или разъяснения. В этом смысле аргументация всегда диалогична и шире логического доказательства (которое по существу безлично и монологично), поскольку она ассимилирует не только «технику мышления» (собственно логику), но и «технику убеждения» (искусство подчинять мысль, чувство и волю человека).

Основные аспекты аргументации: ***фактуальный*** (информация о фактах, используемых в качестве аргументов), ***риторический*** (формы и стили речевого и эмоционального воздействия), ***аксиологический*** (ценностный подбор аргументов), ***этический*** (нравственная приемлемость или дозволенность аргументов) и, наконец, ***логический*** (последовательность и взаимная непротиворечивость аргументов, их организация в логически приемлемый вывод).

Эти и другие аспекты аргументации рассчитаны на то, чтобы наилучшим образом влиять на аудиторию. Поэтому они взаимно дополняют друг друга. Первый определяет «материю» аргументации, а остальные — её форму, «форму сказывания». Однако их значимость может варьировать в зависимости от конкретной ситуации. Например, в обиходе чисто логические средства аргументации используются редко. В свою очередь, правильный логический вывод не зависит от интуитивной убедительности посылок и аксиом. Его принудительность (обязательность, общезначимость) — во взаимной связи суждений согласно правилам вывода. Если же при этом имеет место убеждённость в истинности посылок и аксиом, то логический вывод становится ***логическим доказательством***, т.е. самым сильным вариантом аргументации.

Таким образом, следуя Аристотелю, я отделяю логику от аргументации как часть от целого, только логику определяя как науку о доказательстве. С этого именно и начинал Аристотель, говоря, что в логике «исследовать должно доказательство и что это — дело доказывающей науки»[18].

Но, имея в виду тот путь развития, который прошла логика от времён Аристотеля до наших дней, следует обобщить наше понимание логики и сказать, что логика — это совокупность научных теорий и философских концепций, в которых рассматриваются все возможные процессы рассуждения с точки зрения их способности служить

---

[18] *Аристотель.* Аналитики. М., 1952. С. 9.

средством открытия и доказательства истинных положений, выражающих наше знание о явлениях, фактах, закономерностях и т.п. в различных областях действительности; логика — это теоретическая форма обращения с основными элементами нашего мышления: понятиями, суждениями и умозаключениями, представленная в виде ***исчислений*** (формальных систем), кодифицирующих правила и законы такого обращения[19].

1.3. К понятию «обоснование»

Потребность в обосновании — важнейшая потребность научного мышления, которое, по словам Гегеля, знает лишь основания и выведенное из оснований. Выделительный оборот звучит здесь, правда, иронией. В устах этого философа этим намеренно подчеркивается известная ограниченность научного (по кантовскому определению «рассудочного») мышления. А между тем, проблема обоснования была поставлена, прежде всего, как философская проблема. От этой проблемы, — начиная с античности, — ведёт своё происхождение всё множество философских гипотез и сопровождающих их философских аргументов об основах бытия и познания. Лишь много позднее пришла отдельная методология науки с её требованием логических средств, дающих право на доказательство.

С тех пор обоснование и доказательство становятся главными составляющими аргументации — обоснование обязательной, а доказательство желательной. Нередко их даже не различают, объявляя доказательством систему рассуждений, родственных доказательству, но с более широким и более интуитивно значимым классом (набором) аргументов, законность которых является вопросом степени. Это особенно заметно в гуманитарной области знания с её расплывчатым (объёмно неопределённым) понятием доказательства. Но обоснование необходимо при любой значимой аргументации. А доказательство только достаточное (но не необходимое) условие этого акта мышления. Как утверждают интуиционисты, обоснование возможно «до тех пределов, до которых ведёт интуиция»[20].

---

[19] См.: *Бирюков Б.В.* Логика // Энциклопедия современной техники. Автоматизация производства и промышленная электроника. М., 1963.

[20] *Клини С.К.* Математическая логика. М.,1973. С. 234.

Равным образом и у Декарта дедукция мыслится как вторичный момент познания, который предваряется рациональной интуицией, обеспечивающей обоснование начал (посылок дедукции). Позднее эту тему развивал и Блез Паскаль, полагая, что убеждать можно только посредством интуитивно очевидного.

Иначе говоря, обоснование может быть (и обычно бывает) слабее доказательства. Всё, что требуется от обоснования — это убедительность, а убедительность никогда не бывает абсолютной. Известный кризис оснований математики неразрешим не в силу недостатка аргументов, а именно в силу относительности и конвенциональности возможных здесь обоснований. Субъективный момент выбора аргументов здесь остаётся неустранимым.

В действительности, имеется немало проблем, для разрешения которых недостаточно ни эксперимента, ни вычислений, ни самой логики. Не случайно Паскаль утверждал «резоны сердца», отличные от «резонов разума», оставляя на долю сердца — и ultima ratio, и все ***последние*** основания для доказательств, из которых разум должен исходить в своих логических рассуждениях.

Аристотель не идёт так далеко в поисках интуитивных аргументов для пользы доказательств. Напротив, он остаётся всецело в пределах «резонов разума». Аристотеля можно назвать, пожалуй, первым представителем антипсихологизма в логике. Он настойчивей, чем другие философы его времени, склонялся к тому, чтобы элиминировать психологические аргументы как средства аргументации, полагая, что правильный способ убеждения совпадает с логическим доказательством и предлагая аргументировать так, чтобы всё находящееся вне области доказательства было излишним.

Вводя в тему аргументации и обоснования психологическое измерение, естественно заключить, что обоснование как «интеллектуальная задача» — это оборотная сторона открытия, когда отчётливо осознаётся, что «принять» ещё не означает «понять», причём понять так, чтобы стало очевидным «существо дела». Сначала чувствует сердце, а уж потом доказывает разум, говорил Паскаль.

Так, систему вещественных чисел принимали и до попытки арифметизации анализа, руководствуясь интуицией и не требуя формальных доказательств. Идея каждую точку геометрической прямой понимать как число, точнее каждой геометрической величине поставить в соответствие её «числовой образ», отчасти уже содержится в аналитическом методе Декарта. Но вполне она была сформулирована Лежандром [21]. С тех пор несоизмеримость (конечную неопределимость), являющуюся абстрактным математическим фактом, стали отождествлять с существованием иррациональных чисел, заполнивших все щели в рациональном решете континуума. Так сформировался взгляд на эквивалентность числовых и точечных множеств, что уже являлось не математическим фактом, а только постулатом. А поскольку исходной базой всегда оставался натуральный ряд, идея арифметизации не заставила себя ждать. Иначе говоря, диссонанс между «принять» и «понять» математическую идею непрерывности (континуума), особенно подчёркнутый логическими пробелами в наивных концепциях вещественного числа, породил потребность в её логическом обосновании на базе интуитивно ясных арифметических представлений.

По существу, это стало прелюдией к решению более общей интеллектуальной задачи, которая на первом этапе переросла в задачу теоретико-множественного обоснования анализа (Г.Кантор) на условиях трансцендентных абстракций, а затем — с открытием парадоксов, — когда вновь зазвучал диссонанс между «принять» и «понять» и речь пошла уже о самой теоретико-множественной концепции, приобрела чисто методологическую значимость — реформировать самоё теорию множеств на приемлемой аксиоматической основе, избавляющей от парадоксов (позиция математического формализма) или, напротив, вовсе отказаться от этой теории в пользу конструктивных методов (интуиционизм и конструктивизм), или, наконец, построить обоснование с привлечением «живого Адама» (выражаясь на языке Маннури), как это сделал ультраинтуиционизм. Все это равным образом имело целью обоснование логики и математики путём анализа и новых принципов. Именно здесь и вступают в силу методологические (философские) установки, которые существенны особенно тогда, когда общая задача обоснования определилась и вопрос только в форме этого обоснования.

С точки зрения философской обоснование — это некий критический ход размышлений над сущностью чего-либо. При этом, когда мы намереваемся оправдать какое-либо мнение, развить (изложить) точку зрения, выработать решение или сделать выбор и т.п., наш разум начинает активно искать необходимые

---

[21] *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики. М., 1969. С. 195. По поводу его Eléments de géométrie (Paris, 1794) Стройк замечает, что Лежандр «отошёл от платоновских идеалов Евклида». Однако о его идее вещественного континуума этого не скажешь

аргументы. Элементы убеждения, которые мы при этом используем, включаются в процесс более или менее интуитивный, выработанный привычкой. Но этот процесс можно анализировать под углом зрения его организации, связи между элементами мысли, которые создаются в целях формирования наиболее убедительных доводов.

Обычно мы требуем логической ясности от данных рассуждений, хотя иногда стремимся убеждать, исходя из аргументов, применяемых без видимой тактики или стратегии или какой-либо ясно обозначенной логики. Однако в любом случае обоснование — это приведение (разыскание) достаточных оснований для чего-либо: бытия, познания, мысли, деятельности и пр. В этом смысле обоснованием равно являются и указание причины, и индукция из факта, и логический вывод. Например, достаточным основанием для суждения «Солнце греет» служит непосредственный опыт независимо от какой-либо физической теории, хотя, конечно, оно может быть обосновано и теоретическим рассуждением, использующим физические данные (законы) и логику.

Вообще, необходимо различать эмпирические аргументы обоснования и теоретические. Смешение аргументов чревато потерей строгости в рассуждении или в теории. Например, в евклидовской геометрии утверждения о равенстве фигур (отрезков, треугольников и пр.) обосновывались ссылкой на (опытный) факт их наложения (совмещения при наложении). Но при этом свойства равенства утверждались аксиоматически. Ясно, что это немедленно порождало вопрос (хотя и не поставленный самим Евклидом) о согласовании евклидовской теории и опыта; вопрос, который так мучил не только философскую, но и математическую мысль. И Лобачевский, и Риман полагали, что со временем ответ на этот вопрос будет найден и при этом повлечёт существенные изменения в экспериментальных и теоретических основах ньютоновской механики.

Согласно Герману Вейлю, если в качестве оснований берутся аргументы внелогические, например чувственные восприятия или наглядные представления, то обоснование будет ***абсолютным*** в том смысле, что «независимо от того, насколько туманным оно может быть, в этой туманности есть нечто, данное именно так, а не иначе»[22].

Но в то же время, в другом смысле, такое обоснование будет и ***относительным***, поскольку оценка, основанная на чувственном опыте, равносильна некоторому суждению восприятия, некоторой субъективной точке зрения на то, что нечто дано нам именно так, а

---

[22] См.: Эйнштейновский сб. 1978-1979. М., 1983. С. 105.

не иначе. «Лишь только нам изменяет наше восприятие, как нам изменяет также наше представление или интуиция. Только постепенно, после долгого размышления, мы можем расширить способность представления»[23]. А в таком случае «каждый может найти подтверждение для своей субъективной точки зрения, как бы она ни отличалась от других»[24].

Из сравнения этих двух ситуаций естественно возникает мысль о ***глубине обоснования и аргументации.*** В сфере дедукции последними по глубине основаниями являются постулаты и ***логика теории***. В сфере опыта — эксперимент и ***логика опыта***. Хотя логика теории и логика опыта служат одной цели познания, это всё же различные логики, лишь в некотором смысле согласованные между собой. Есть определённые основания считать, что именно в силу особой логики опыта, теория, описывающая этот опыт, независима от него. Никакой эксперимент не может фальсифицировать утверждения, основанные на ***чистой логике*** теории. Он может лишь обозначить интервал применяемых при этом абстракций. Ведь не зря же, применяя абстракции, мы нередко отказываемся от критерия практической (интуитивной) очевидности и доверяемся только логике теории. Если же мы отказываемся от интуиции вовсе, то логика теории становится ***абсолютным критерием*** обоснования, даже если полученные с её помощью результаты противоречат возможностям опытной проверки (пример: теорема Банаха — Тарского). И всё же мы понимаем, что выбор теоретических принципов (например, принципа выбора) и доверие к ним сами нуждаются в обосновании, которое может и не принадлежать чистой логике.

1.4. К истории формального обоснования интуиционистской логики

Философская роль математического интуиционизма с самого начала определялась его оппозицией к абстракциям классической математики и логики, которые позволяли отвлекаться от гносеоло-

---

[23] Слова в кавычках принадлежат Л.Больцману. См.: Новые идеи в математике. Сб. 8: Математика и философия I. СПб., 1914. С. 125-126. Далее Больцман говорит о невозможности непосредственного восприятия очень больших чисел. Подобную же мысль до него высказывал Г.Фреге.

[24] *Гегель Г.В.Ф.* Работы разных лет. Т. 2. М., 1971. С. 14.

гических ограничений, связанных с отсутствием общего (рекурсивного) метода для разрешения альтернативы «истинно — ложно» применительно к произвольным суждениям и, в частности, к суждениям о свойствах объектов «открытых» (бесконечных) совокупностей.

В отличие от классических представлений, тяготеющих к онтологическим праобразам для математических понятий, для интуиционизма математическая реальность исчерпывается реальностью самой мысли: «с интуиционистской точки зрения математика является изучением определённых функций человеческого разума»[25]. Для интуиционизма содержание математического мышления автономно. В этом пункте философская установка интуиционизма близка к философской установке Гегеля, который отмечал большую разницу между тем, что нечто ***просто есть*** (как онтологическая реалия) и тем, что ***знают, что это есть.***

Теперь эта разница взята на учёт эпистемической логикой. Но первым шагом в описании логики, связанной с этой разницей, был, конечно, интуиционизм. Именно интуиционисты первыми выбрали в качестве критерия для утверждений (принятия суждений) наиболее философский критерий — знание. Это было «знание духа» с основой в чувственном опыте. Функции разума, о которых говорят интуиционисты, это его способность к абстрактным мысленным построениям, которые, при всей их абстрактности, сродни результатам нашей практическлй деятельности. Отождествление этих функций с алгоритмической вычислимостью — это пока «самый практический» ответ на вопрос об истинности математических суждений.

Поскольку интуиционизм придаёт эффективности (в частности, общерекурсивности) доказательств (установления свойств) решающее значение, не удивительно, что в общем случае в интуиционистских теориях отказываются от принципа исключённого третьего (tertium non datur). Чтобы нечто утверждать, необходимо уметь эффективно проверять свои утверждения. Дихотомия установленной истины и лжи, конечно, неоспорима. Но для разрешения дихотомии утверждения и отрицания универсального способа нет.

Между тем вопрос о логике без tertium долгое время оставался без ответа в силу принципиальной установки брауэровской школы. Согласно этой установке, точная математическая мысль основывается не на логике, а на рациональной интуиции, которая и должна судить о законности применения тех или иных логических аксиом и

---

[25] *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965. С. 19.

правил. Но так как «интуитивно ясное» невозможно без искажений перевести в формальную систему, то в принципе невозможно построить систему формул, которая была бы равноценна системе интуитивно ясных принципов рассуждения.

И всё же, в известном смысле вопреки этой брауэровской установке, к концу 20-х годов начинаются поиски формализации интуиционистски приемлемых способов рассуждений. К этому побуждали, по крайней мере, два обстоятельства: во-первых, начавшаяся со стороны других философских направлений полемика с интуиционизмом, попытки сторонников этих направлений представить интуиционизм как незаконное явление, настаивая на противоречивости его логических основ; во-вторых, вполне естественное в этих условиях стремление точнее представить себе (уяснить) систему интуиционистских понятий.

Именно в связи с обстоятельствами, указанными выше, я хочу уточнить некоторые исторические эпизоды, связанные с полемикой вокруг теоретических основ интуиционистской логики, и, в частности, позитивную работу российских математиков, которые активно способствовали и логическому оформлению системы интуиционистских понятий, и защите брауэровского подхода от обвинений в противоречивости.

В конце прошлого века русский философ Н.Я.Грот видел главную особенность логической науки «в том, что чем более она развивалась, тем более и умножались различные направления её обработки и различные взгляды как на ее задачи вообще, так и на отдельные вопросы, в нее входящие»[26].

Н.Грот не считал эту тенденцию к обновлению и преобразованию положительной чертой логической науки, поскольку для него подлинная научность («точных наук») требовала однообразия выводов и согласия исследователей по всем частным вопросам. Отсутствие такого согласия в логике он объяснял ее зависимостью от философии, стремящейся скорее к удовлетворению субъективных запросов личности, чем к объективному исследованию.

Между тем, эволюция логики свидетельствовала как будто о другом: уже с эпохи средневековья логика жила в постоянных поисках методов, которые позволили бы выйти за узкие рамки аристотелевской силлогистики, преодолеть убеждение, что логика не может сделать ни одного существенного шага вперед и является, по существу, «наукой вполне законченной и завершенной»[27].

---

[26] *Грот Н.Я.* К вопросу о реформе логики. Лейпциг, 1882. С. 5.
[27] *Кант И.* Соч. Т. 3, М., 1964. С. 82.

И отсутствие «согласия исследователей» в то время, когда Н.Грот ставил вопрос о реформе логики, следовало бы объяснять не субъективным фактором их разномыслия, а тем, что логика в ее традиционных границах окончательно не соответствовала потребностям нового времени, не могла служить «преддверием науки» пока сама не была поставлена на современный ей научный фундамент.

Теперь хорошо известно, каким путем пошла реформа логики. В ответ на запросы времени была создана новая теория дедуктивных рассуждений, получившая название математической логики не только в силу ее «внешнего облика» (исчислений высказываний и предикатов), но и по причине ее кровной связи с проблемами обоснования математики.

Правда, на первом этапе своего развития математическая логика в качестве алгебры логики (алгебры классов) создавалась как математическая модель (для математической интерпретации) традиционной логики. И это обстоятельство давало повод оценивать ее всего лишь, как иной («схоластический») метод анализа «старых метафизических понятий». Позднее новая задача — обоснование математики — существенно изменила характер математической логики, не изменив, однако, тенденции, подмеченной Н.Гротом, и не оборвав (а скорее укрепив) связь логики и философии, поскольку сама задача обоснования математики решалась в рамках «философски окрашенных» направлений. И хотя ни одно из этих направлений «теперь не претендует на право представлять единственно верную математику»[28], тогда, в начале двадцатого века, они претендовали именно на такую роль.

Непосредственным результатом «идейной борьбы» этих направлений явилось то, что логика из «черно-белой» стала «цветной», была подорвана доктрина о единых (всеобщих) правилах мышления, выявилась возможность развивать различные формы логики для различных целей[29], так что логический релятивизм стал бесспорным фактом[30].

---

[28] *Гейтинг А.* Тридцать лет спустя // Математическая логика и её применения. М., 1965. С. 225.

[29] См.: *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965. С. 15.

[30] Консервативная реакция на это, конечно, осталась: «Мысль... что может существовать несколько различных логик, является полным логическим абсурдом. Это необходимо постоянно повторять, кажется, потому, что в философии существуют не только вечные понятия или проблемы, но также — и вечные бессмыслицы. Логический релятивизм есть именно такая бессмыслица» (*Rickert H.* Die Logik des Prädikats und das Problem der Ontologie, SHA, phil.-hist., K 1, 1930/31, 1 Abh., s. 49). Цит. по кн.: *Scholz H.* Zarys historii logiki. Warszawa, 1965.

По мнению Г.Шольца, уже расселовская логистика пробила брешь в представлении о единственности логики, явилась, так сказать, первой теорией, экспериментирующей над полем логических понятий. И всё же брауэровская (интуиционистская) критика оказалась столь неожиданной и революционной, что в течение первых десятилетий становления голландской школы «интуиционистам приходилось отвоёвывать себе место «под математическим солнцем» в острых спорах с представителями других направлений в основаниях математики»[31].

К слову сказать, брауэровский интуиционизм, с трудом приобретавший сторонников на западе Европы, нашел скорое признание на востоке, у математиков и логиков России. И это неудивительно, поскольку многие из них входили в то время в Московскую математическую школу, возглавляемую Н.Н.Лузиным, — выдающимся представителем «полуинтуиционистской» концепции в основаниях математики, известной также под именем эффективизма[32]. И если впоследствии российские сторонники интуиционистских идей отступились от идеалов своей молодости, то, думается, это произошло потому, что в эпоху 30-40-х гг. «красная профессура» должна была называться красной не только «по определению»[33].

Одной из первых статей, конституировавших логику, согласованную с брауэровскими (интуиционистскими) методами (правилами) рассуждений, стала статья А.Н.Колмогорова «О принципе tertium non datur»[34].

Дело в том, что отказываясь от tertium, признавая незаконность его применения в области трансфинитных умозаключений, Брауэр не уточнял, какие именно принципы логики он допускает. А это был нетривиальный вопрос, поскольку практика логических рассуждений так или иначе сохранялась, а исключение tertium из числа законов (теорем) с необходимостью требовало пересмотра всего запаса тео-

---

31 *Бирюков Б.В.* Г.Вейль и методологические проблемы науки // *Вейль Г.* Симметрия. М., 1968. С. 177.

32 Справку о методологических и философских посылках эффективизма см.: Философская Энциклопедия. Т. 5. М., 1970. С. 591-592; Философский Энциклопедический Словарь, М., 1989, с. 780. Замечу, что сам Н.Лузин энтузиазма по поводу новых логических идей не испытывал. Вот, как он оценивал их в 1929 г.: «существование многих логик было бы, право, очень печальной роскошью. Мне кажется, что построение новой логики в настоящее время крайне преждевременно» (*Лузин Н.Н.* Соч. Т. 2. М., 1958. С. 468).

33 Не пожелавший окрашиваться в красный Н.Н.Лузин получил «титул» математика с «черносотенным образом мыслей фашистской окраски». Очень подробно об этом см. в кн.: Дело академика Николая Николаевича Лузина. СПб., 1999.

34 Математический сб. Т. 32, вып. 4. М.-Л., 1925. С. 646-667.

рем (и соответственно аксиоматики) классической (традиционной) логики. Такая работа и была предпринята в статье А.Н.Колмогорова, который, однако, подчёркивал, что только в логике математических рассуждений «возникает сомнение в безусловной применимости принципа tertium non datur», поскольку только в математике мы встречаемся с необходимостью трансфинитых суждений[35]. Колмогоров (как и Брауэр) полагал, что tertium может быть принят в ограниченной области суждений, называемых финитными, но он одновременно указывал на трудности выявления «границ области финитных суждений». Проанализировав классическую аксиоматику Гильберта с точки зрения интуиционистских требований к интуитивной ясности суждений (и усиливая этот критерий по отношению к суждениям, включающим отрицание), А.Колмогоров предложил законченный фрагмент интуиционистской логики в форме аксиоматического ***импликативного минимального исчисления*** высказываний и предикатов.

Правда, статья А.Колмогорова имела ещё и другую, как бы обратную методологическую цель: оправдать «незаконное» применение tertium non datur в области трансфинитных умозаключений в свете понятий «псевдосуществования» и «псевдоистинности» — понятий более слабых, чем классические понятия истинности и существования[36]. На этом пути А.Н.Колмогоров предвосхитил более поздние результаты В.И.Гливенко (1929) и К.Гёделя (1932), касающиеся отношений между классической и интуиционистской логикой, классической и интуиционистской математикой. Но его идейная основная установка по вопросу о допустимых аксиомах логики была в этот период критичнее интуиционистской: он отказывается не только от классических аксиом отрицания, но и от интуиционистски приемлемой ex falso sequitur quodlibet[37].

Статья А.Н.Колмогорова появилась за год до начала дискуссии об основах брауэровской логики между Р.Вавром, П.Леви, Э.Борелем и М.Барзиным и А.Эррерой на страницах Revue de Métaphysique et de Morale. Едва намечавшиеся контуры новой логики окрестили тогда ***эмпирической математической логикой.***

---

[35] Попутно замечу, что проблема tertium была поставлена Аристотелем до проблемы трансфинитных умозаключений, поскольку и в финитной области возникают задачи, которые не допускают положительного решения в духе tertium.

[36] Термин «псевдосуществование» по отношению к эффективно непредставимым (невыразимым) объектам употреблял и Н.Н.Лузин.

[37] Позднее по сходным соображениям от ex falso откажется И.Йохансcон (Compositio Mathematica, v. 4, fasc. 1, Groningen, 1937), а ещё позднее — А.С.Есенин-Вольпин в своей ультраинтуиционистской программе (Логические исследования. М., 1959).

Сочетание понятий «логика», «математика» и «эмпиризм» было не случайным. И сказывалось здесь не столько влияние философской традиции[38], сколько начавшийся уже пересмотр концепции существования в математике в связи с обострившейся полемикой вокруг логических основ канторовской теории множеств. Помимо интуитивной очевидности доказательств существования и соответствующих им логических принципов (трансфинитные принципы вроде tertium заведомо отвергались) интуиционизм выдвинул такие условия на средства доказательства, при которых математические теоремы должны рассматриваться как квази-эмпирические факты определённым образом осуществлённых построений, т.е. как выражения по сути эмпирических (с поправкой на абстракцию потенциальной осуществимости) результатов. Именно в связи с этими условиями интуиционистская концепция запрещала, вообще говоря, заключать о существовании математических объектов из доказательств непротиворечивости (позиция классиков в этом вопросе другая: непротиворечивость влечёт выполнимость, или — всякая непротиворечивая теория имеет модель). Согласно Брауэру, непротиворечивость говорит только о возможности осуществления, но существование — это уже осуществлённая возможность (факт). Вот почему ответственность за истинность утверждений (суждений) о существовании объектов с определенными свойствами должна нести не логика, а соответствующая этим объектам теория. Аристотелевское понимание «истины» и «лжи» здесь, вообще говоря, не годится, поскольку конструктивная истинность совпадает с доказуемостью (с осуществленным построением), а ложность — с опровержимостью (с осуществленным приведением к абсурду), понятием заведомо более сильным, чем ложь: абсурдность имплицирует ложь, но ложь не всегда имплицирует абсурдность.

В результате вместо duplex negatio affirmat в брауэровской логике появляются три независимых утверждения о состоянии суждений: истинность суждения, абсурдность суждения и абсурдность абсурдности суждения[39].

---

[38] Хотя та же проблема эффективности выросла по существу из «старой» философской задачи финитной характеризации эмпирической (трансцендентальной, а не трансцендентной) всеобщности, которая занимала некоторых логиков 19-го столетия. Подробно об отношении брауэровской школы к философским установкам вообще см.: *Гейтинг А.* Обзор исследований по основаниям математики. М., 1936; *Суханов К.Н.* Критический очерк гносеологии интуиционизма. Челябинск, 1973.

[39] Дальнейшая итерация отрицаний не даёт ничего нового в силу теоремы $\neg\neg\neg p \supset \neg p$, полученной Брауэром в 1923 г. Формальное доказательство этой теоремы дано в первой статье В.Гливенко.

Хотя, как отметил Ролэн Вавр, это не является ни намеком, ни указанием на закон исключенного четвертого (quartum non datur)[40], всё же тот факт, что абсурдность абсурдности суждения не влечёт, вообще говоря, ни его истинности, ни его абсурдности, порождал подозрение в трёхзначности брауэровской логики, о чём в 1927 г. и заявили бельгийские математики М.Барзин и А.Эррера. Правда, основанием для этой гипотезы им послужило другое обстоятельство, на которое ссылаются эти авторы.

В классической логике суждение существования можно получить из отрицания (приведения к противоречию) универсального суждения, пользуясь общезначимой формулой $\neg\forall x\ \alpha(x) \supset \exists x\neg\ \alpha(x)$. Это одна из формул, которые лежат в основе умозаключений по принципу исключенного третьего. «Например, — пишут М.Барзин и А.Эррера, — либо всякое число обладает некоторым свойством α, либо это ложно, и существует некое число, которое этим свойством не обладает. Ибо достаточно доказать, что первая из этих гипотез приводит к противоречию, чтобы установить существование числа, которое не обладает свойством α. Г-н Брауэр, не допуская доказательств существования без построения, приходит к заключению, что ложность первого суждения не влечет с принудительностью (forcément) истинности второго; из чего следует, что второе суждение должно иметь иное истинностное значение, чем истина или ложь.

Таким образом, необходимо, чтобы имело место некое третье состояние суждений и чтобы по крайней мере одно суждение находилось в этом третьем состоянии, т.е. было бы не истинным и не ложным»[41].

Казалось, из этого отрывка можно было бы заключить, что М.Барзин и А.Эррера признавали для брауэровской логики интерпретацию на трёхзначной модели истинностных значений **корректной**, в чём их неоднократно и упрекали и на что неоднократно указывалось в позднейшей литературе[42]. Однако, справедливости ради, отмечу, что упрёки эти неосновательны. Как видно из известной статьи этих авторов, их главная цель — «показать, что, допуская третье значение суждений, невозможно рассуждать, не впадая тотчас же в противоречие»[43].

---

[40] *Wavre R.* Logique formelle et logique empiriste // Revue de Méthaphysique et de Morale, janvier, 1926.

[41] Sur la logique de M.Brouwer. Résumé d'une Note parue 8 janvier 1927 dans Bulletin de l'Académie de Belgique // *Borel E.* Leçon sur la théorie des fonctions, Paris, 1928. P. 283.

[42] См. например: *Гейтинг А.* Обзор исследований... С. 23; *Яновская С.А.* Основания математики и математическая логика // Математика в СССР за тридцать лет. М.-Л., 1948. С. 30; *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1968. С. 263.

[43] *Barzin M., Errera A.* Sur la logique de M. Brouwer // Académie Royale de Belgique. Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, 13, 1927. P. 60.

Гипотеза трёхзначности была для М.Барзина и А.Эрреры чем-то вроде гипотезы ad hoc, которая должна быть отброшена перед лицом возражений более веских, чем временный характер третьей возможности. Таким абсолютно веским возражением являлась для них, конечно, противоречивость. И поскольку эти авторы констатировали, что брауэровская концепция оснований математики не может обойтись без гипотезы «трёх состояний», они и попытались показать противоречивость этой концепции.

В принципе идея «третьего состояния», вообще говоря, не оспаривалась никем. Она определялась вполне объективным фактом существования недоказанных и не опровергнутых — «неустановимых» (П.С.Новиков), суждений, что, вообще говоря, не противоречило интуиционистской идеологии. И для оппонентов интуиционизма вопрос, казалось, состоял лишь в уточнении онтологического статуса этих суждений: принимать ли их как факт ***относительный***, обусловленный несовершенством нашего познания, или рассматривать их как факт ***абсолютный*** («на все времена»), не зависящий от прогресса нашего знания. В частности, М.Барзин и А.Эррера только в последнем случае готовы были признать основательность критической позиции Брауэра по отношению к tertium. Но стремление получить заведомо отрицательный результат — опровергнуть математический эмпиризм Брауэра — явно возобладало над строгим анализом вопроса.

Таким образом, позитивная работа российских математиков (А.Колмогорова, В.Гливенко и А.Хинчина) состояла вовсе не в критике субъективного идеализма брауэровской школы, как об этом в своё время писали, а в первую очередь в защите брауэровского подхода от обвинений в противоречивости. Конечно, такая защита могла состоять просто в том, чтобы указать на ошибки в рассуждениях М.Барзина и А.Эрреры. Но это не была бы защита в духе логики, защита ad contradictoriam. Для последней нужны были более веские основания.

Первым, кто усомнился в доказательности аргументов М.Барзина и А.Эрреры, по-видимому, был А.Я.Хинчин. Он не указывает непосредственно на ошибки в их доказательстве, но пользуется косвенным методом опровержения по схеме: «Если ***B*** истинно, а из ***A*** следует ***не-B***, то ***A*** ложно», где под ***B*** подразумевается система теорем классической логики высказываний, а под ***A*** — совокупность аксиом и правил логики, принятых бельгийскими авторами. Основная идея — «показать, что, принимая эти правила (и аксиомы — *М.Н.*), мы тотчас приходим к совершенно аналогичному противоречию и в классической логике»[44]. При этом под «совершенно аналогичным противоречием» подразумевался вывод формулы $(\neg p \supset p) \vee (p \supset \neg p)$, которая, демонстрируя «парадоксальный» характер материальной импликации, не является, конечно, подлинным противоречием в системе аксиом и правил, принятых бельгийскими авторами. Кстати, доказав альтернативу $(p' \supset \neg p) \vee (p \supset p')$, эти авторы тоже не получили желаемого противоречия, поскольку, вообще говоря, можно указать такую интерпретацию логических связок и третьего значения суждения p', при которой эта альтернатива не будет выражать никакого противоречия ни «сама по себе», ни по отношению к закону исключённого четвёртого (quartum non datur), который приняли эти авторы в качестве постулата своей («интуиционистской») логики высказываний[45].

Теперь известно, что идея «третьего значения», приемлемая в языке исследователя для выражения фактов, лежащих за пределами математически (интуиционистски) осмысленных «умственных построений», оказалась неприемлемой для семантической интерпретации брауэровской логики. Но впервые это доказано В.Гливенко, который для выяснения всех обстоятельств дела пошёл прямым путём адекватной формализации брауэровских принципов, избегая каких-либо произвольных допущений. Правда, в первой статье он ещё далёк от полной формализации этих принципов и ограничивается слабым фрагментом минимальной логики[46]. Но и этого фрагмента оказалось достаточно, чтобы показать, что полученное М.Барзиным и А.Эррерой «противоречие ничего не говорит против точки зрения Brouwer'a»[47] и попутно дать формальное доказательство двух метаматически важных теорем: неложности tertium и того, что любое ложное суждение, если оно получено с помощью tertium, будет ложным и в брауэровской логике.

---

[44] *Khinchine A.* Objection a note de M.M. Barzin et Errera // Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, 14, 1928. P. 223.

[45] Между прочим, характерно невнимание этих авторов к интуиционистской интерпретации логических связок. К примеру, во второй части Леммы 2, применяя классическую форму reductio ad absurdum, они пользуются как интуиционистски верной (что неверно!) формулой $\neg(p \,\&\, q) \supset \neg p \vee \neg q$, которая играет существенную роль в их доказательстве «противоречивости». См.: *Barzin M., Errera A.* Sur la logique... P. 65.

[46] *Glivenko V.* Sur la logique de M. Brouwer // Académie Royale de Belgique. Bulletins de la classe de sciences. Ser. 5, 14. 1928. P. 225-228. Русский перевод указанных ст. Хинчина и Гливенко см. в кн.: Историко-математические исследования, вторая серия, вып. 5 (40). М., 2000.

[47] *Гейтинг А.* Обзор исследований... С. 23.

Во второй работе, расширяя предыдущую систему аксиом, В.Гливенко уже полностью аксиоматизирует интуиционистскую логику высказываний, включая ex falso sequitur quodlibet и недостававшие прежде аксиомы полной положительной логики[48]. В этой второй статье В.Гливенко решает метаматическую задачу редукции классической логики высказываний к интуиционистской, то есть, по существу, даёт доказательство ***относительной непротиворечивости*** интуиционистской логики.

1.5. Аргумент от непротиворечивости

Это один из самых древних аргументов. В европейскую науку его ввели, по-видимому, элеаты. Во всяком случае, по свидетельству Филопона, отстаивая идею умопостигаемой реальности, именно Парменид и его сторонники ставили во главу угла её непротиворечивость. Им же принадлежит и первый «штриховой портрет» аргументирующего рассуждения, использующего дедуктивные свойства противоречия. Я имею в виду «уличающие аргументы» Зенона Элейского, его апории, основанные на этом способе логической аргументации. Правда, логическая форма зеноновских аргументов {а именно: $(A \supset \neg A) \supset \neg A$} была эксплицирована только в школе Платона. Этой же школе принадлежит, по-видимому, и аргумент, представленный известной формулой $(A \,\&\, \neg A) \supset B$. Отрицая «критерий основания» Протагора, Платон замечает, что если этот критерий принять, то придётся допустить и законность противоречий, а следовательно, и произвольность суждений. Ещё позднее Аристотель в одном из своих ранних (утерянных) произведений не только явно сформулировал ***закон противоречия***, но (по свидетельству Александра Афродизийского) дал симметричную зеноновской формулировку косвенного аргумента, которой воспользовался Евклид {«Начала», кн. IX, теорема 12: $((\neg A \supset A) \supset A)$} и которая получила впоследствии (в позднем средневековье) название «тонкое следование» (consequentia mirabilis).

Современное развитие темы противоречия своё начало ведёт от первых парадоксов, обнаруженных в наивной теории множеств. Именно тогда Анри Пуанкаре заявил, что понятие «существовать» в математике может иметь только один смысл — отсутствие противоречий. Такая постановка вопроса позволяла использовать без

---

[48] *Glivenko V.* Sur quelques points de la logique de M. Brouwer // Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences. Ser. 5, 15, 1929. P. 183-188.

ограничений все виды так называемых апагогических косвенных доказательств, которые основываются на дедуктивных свойствах противоречий[49].

Первые примеры таких доказательств восходят к античности. В частности, Аристотель явно отмечает косвенные умозаключения как средства доказательства «посредством приведения к невозможному» (reductio ad impossible), добавляя, что «при приведении к невозможному противоположное суждение (противоречащее тезису — *М.Н.*) есть истина не заранее признанная, а условно взятая»[50].

Аристотель не даёт подробный анализ косвенных аргументов. Между тем, их уточнение послужило основанием к разделению косвенной аргументации на различные степени косвенности и к размежеванию логики на классическую, допускающую свободное использование всех форм аргументации от противоречащего случая (например, все формы обратной контрапозиции), и интуиционистскую (конструктивную), допускающую, вообще говоря, только одну её форму — доказательство отрицательных суждений через построение, приводящее к противоречию гипотезу об истинности положительной посылки рассуждения.

Таким образом, приведённый выше закон Зенона соответствует интуиционистской установке, а его симметричная форма, данная Аристотелем, нет. Это обусловлено тем, что косвенные формы доказательства положительных тезисов уравнивают в правах положительные и отрицательные способы утверждений в форме закона двойного отрицания (лат. duplex negatio affirmat), что интуиционистски неприемлемо. Правда, речь идёт только о той части этого закона, которая разрешает «снимать» двойное отрицание. Полный закон утверждает тождественное равенство (равносильность) какого-либо суждения и его двойного (повторенного дважды) отрицания, чему соответствует факт совместной выводимости (доказуемости) в классических пропозициональных исчислениях (исчислениях логики высказываний), включающих отрицание, формул ($A \supset \neg\neg A$) и ($\neg\neg A \supset A$), где «$\supset$» — символ отрицания (выражения: «неверно, что»).

С точки зрения абстракций классической логики, то есть при условии, что принята дихотомическая оценка суждений «истинно — ложно» (***ситуация исчерпания***) и закон противоречия (***ситуация ис-***

---

49 Подробно с содержанием этих доказательств можно ознакомиться по ст.: *Есенин-Вольпин А.С.* Доказательство от противного // Философская энциклопедия. Т. 2. М., 1962; *он же*: Косвенное доказательство // Философская энциклопедия. Т. 3. М., 1964; ***Новосёлов М.М.*** Доказательство косвенное // Новая философская энциклопедия. Т. 1. М., 2000.

50 *Аристотель.* Аналитики, 61a 19 — 61b 4. М., 1952. С. 142.

ключения), закон двойного отрицания представляется очевидным. В самом деле, если истинно A, то ложно $\neg A$ (на основании ситуации исключения). И так как (на основании ситуации исчерпания) другой возможности нет, отрицание $\neg A$, то есть $\neg\neg A$ должно быть истинно. Таким образом, истинность A влечёт истинность его двойного отрицания. Это так называемая прямая (первая) подформа закона двойного отрицания. Она принимается и в интуиционистской логике. Обратная (вторая) его подформа — закон снятия двойного отрицания обосновывается тем, что суждения, несовместимые с одним и тем же суждением, классически равносильны (на основании ситуации исключения и ситуации исчерпания, взятых одновременно). В частности, и $\neg\neg A$ и A несовместимы с $\neg A$. Следовательно, они либо одновременно истинны, либо одновременно ложны (таков именно смысл равносильности суждений), что и оправдывает импликацию $(\neg\neg A \supset A)$.

Основной вопрос, связанный с доверием к duplex negatio, — это вопрос о логическом смысле отрицания. На это обратил внимание ещё Христоф Зигварт: «сущность отрицания исчерпывается вполне лишь в том случае, когда к закону противоречия присоединяется положение, что *отрицание отрицания* даёт утверждение»[51].

Правда, принятие этого закона в двух его подформах само по себе ещё недостаточно для порождения классического смысла отрицания. Тем не менее, закон двойного отрицания, уравнивая положительную и отрицательную манеру утверждения, раскрывает по существу формальный (и циклический) смысл отрицания в классической логике: любое чётное число отрицаний можно исключить из состава суждения или включить в состав суждения без изменения значения истинности. (В более общей форме: любое число отрицаний можно представить как $(n + 1)$, где $n \geq 0$; если n — чётное, то $(n + 1) = 1$; если нечётное, то $(n + 1) = 0$).

Этот формальный подход к вопросу об отрицании сложился уже в логике Аристотеля, который, по свидетельству Зигварта, «понимал утверждение и отрицание как совершенно параллельные и равноценные формы высказывания, и поэтому он не дал себе достаточного отчёта относительно сущности самого отрицания, даже, строго говоря, не оставил никакого места для отрицания отрицания»[52].

Такая аристотелевская позиция характерна не только для традиционной, но и для классической математической логики, которая с самого начала вводит отрицание в состав основных операций мыш-

[51] *Зигварт Х.* Логика. Т. 1. СПб., 1908. С. 168.
[52] Там же. С. 169.

ления и не интересуется ***генетическим характером*** отрицания, тем, каким образом появляется отрицание в процессах рассуждения. В этой логике duplex negatio рассматривают либо в качестве следствия закона исключённого третьего, либо как уже сложившейся формальный факт.

Между тем, не одно и то же, возникает ли отрицание из свидетельства чувств, являясь мысленным отражением эмпирического факта, или же оно имеет смысл суждения, противоречащего какому-либо другому суждению, то есть попросту является возражением на какое-либо ранее сделанное утверждение. В первом случае фундаментальным понятием является реализуемая «различимость», во втором, — далеко не всегда реализуемая (поддающаяся верификации) гипотеза.

На эту принципиальную разницу в ситуации впервые обратил внимание логиков голландский математик Грисс[53].

Очевидно, что равноправие утверждения и отрицание естественным образом нарушается, когда мысль выходит за пределы элементарной проверяемости и наглядного опыта, когда вопрос об истинности или ложности решается не опытной проверкой, а логическим рассуждением. Тогда правила логики приобретают по существу априорный характер, и возникает проблема доверия к этим правилам.

На первый взгляд, недоверия к duplex negatio не более, чем недоверия к tertium, поскольку в рамках интуиционистской и ультраинтуиционистской логики первое выводится из второго, но не наоборот[54]. Однако, если вопрос о принципе исключённого третьего относительно ясен, то вопрос о принципе двойного отрицания кажется менее ясным, и в математических доказательствах (и, вообще говоря, не только в них) «постоянно возникают вопросы, касающиеся двойных отрицаний»[55].

Но если мы отказываемся от duplex negatio, мы должны делать явное различие между положительными и отрицательными суждениями и, более того, мы должны теперь также различать положительные и отрицательные определения понятий (операций). В частности, в положительных определениях символ отрицания не должен входить в определяющее выражение (в difiniendum).

---

[53] Краткую характеристику его концепции и перечень работ см. в кн.: *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965; *Новосёлов М.М.* Положительная логика // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967.

[54] К слову сказать, в третьей главе (этой книги) я привёл пример трёхзначной логики, в которой доказуема независимость duplex negatio от tertium.

[55] *Есенин-Вольпин А.С.* Философия, логика, поэзия, права человека. М., 1999. С. 61.

Следовательно, строго говоря, необходимо различать два вида противоречий и два вида определения отрицания посредством противоречий. А именно, определяя отрицание как $A \supset abs$, мы должны разъяснить, как мы понимаем «абсурд». Обычно это понимается как $A \& \neg A$, и определение в этом случае будет отрицательным. Если же мы понимаем abs как $0=1$, определение отрицания будет положительным. А.Чёрч в своей логике не отмечает этих различий. Он просто вводит константу «ложь», не оговаривая, каким образом мы должны интерпретировать эту ложь.

Впервые на особенность положительного отрицания в арифметике обратила внимание Полетт Феврие, развивая идеи положительной математики (математики без отрицания) Грисса. В частности, она отметила необходимость расширения языка гриссовской логики за счёт введения такого отрицания, которое явно сближает логику Грисса и интуиционистскую логику. «В классической математике, — пишет она, — не придают особой важности различию между положительными и отрицательными определениями. И так как правило двойного отрицания законно в этой математике, всякое предложение в ней одновременно и положительно, и отрицательно. Но это уже не имеет места, если это правило отбрасывается. Различие между положительным и отрицательным является фундаментальным для интуиционизма»[56].

С интуиционистской (конструктивной) точки зрения семантическое содержание снятия двойного отрицания не имеет достаточных оснований не только в силу его связи с законом исключенного третьего. Просто эффективно (например, фактически) устанавливаемая ложь в общем случае не совпадает с абсурдностью суждений, получаемых за счёт логической дедукции в косвенных рассуждениях путём reductio ad absurdum. А именно эта дедукция является единственным логическим путём введения отрицания в интуиционистских доказательствах, препятствуя чисто формальному использованию альтернативы «истина — ложь».

Как известно, непосредственным следствием непринятия этой альтернативы является интуиционистский отказ от tertium non datur[57]. Но если отказ от закона исключённого третьего означает отказ от

---

[56] *Destouches-Février P.* Esquisse d'une Mathématique intuitioniste positive // Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. T. 225, № 25. Paris, 1947.

[57] О законе исключённого третьего (tertium) обстоятельно см.: *Есенин-Вольпин А.С.* Принцип исключённого третьего // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967; а также: *Непейвода Н.Н.* Исключённого третьего закон // Новая философская энциклопедия. Т. 2. М., 2001; *Рассел Б.* Исследование значения и истины. М., 1999. Гл. XX.

альтернативы истины и лжи, то отказ от закона снятия двойного отрицания фиксирует особый (неонтологический) статус отрицательных суждений — их нельзя превратить в утвердительные без потери информации о способах реализуемости этих суждений.

В самом деле, с помощью duplex negatio допустима та форма косвенного доказательства, когда положительный тезис оправдывается (как истинный) опровержением его отрицания. Но в отсутствии снятия двойного отрицания косвенно доказываются только отрицательные тезисы. Таким образом, в отличие от классической симметрии истины и лжи несимметричность положительной доказуемости и интуиционистской отрицательной опровержимости очевидна.

Смущает, однако, то, что в интуиционистских рассуждениях, строго говоря, «первое» отрицание может появиться только как результат опровержения какой-либо положительной посылки, а двойное отрицание допустимо как следствие той же посылки. Между тем, reductio ad absurdum не делает различия между гипотезами A и $\neg\neg A$. В самом деле, чтобы доказать $\neg A$ можно в качестве гипотезы взять как A, так и $\neg\neg A$, поскольку интуиционистски верно $\neg\neg\neg A \supset \neg A$.

Остаётся заметить, что в duplex negatio, как и в tertium, отражается онтологический смысл отрицания, его трансцендентный характер. Отказ от этих принципов приводит естественно к ***неонтологической*** концепции отрицания, вводя понятие отрицания в контекст гносеологических обсуждений (первым на возможность онтологической и неонтологической трактовки отрицания обратил внимание, по-видимому, Ф.Брэдли[58]).

Выше я упомянул об абсолютном характере логического обоснования. Но, вообще говоря, обоснование посредством логической дедукции ***относительно***, по меньшей мере, вот в каком смысле: это обоснование одного суждения с помощью другого (или других) в границах замкнутой дедуктивной системы. Абсолютность выражается здесь только в приведении импликативного отношения основания и следствия (посылки и заключения) к форме логического закона. Косвенные доказательства грешат ещё большей относительностью, поскольку в них нередко приходится прибегать к неосуществимым гипотезам (или построениям). Но принимая гипотезы, мы релятивизируем факт аргументации. «Для всякого, кто не хочет отделаться от проблемы словами, нет другой необходимости, кроме необходимости гипотетической. Ни один тезис нельзя считать необходимым. Мы не знаем другой необходимости, кроме необходимости следствий из некоторой гипотезы»[59].

---

[58] *Bradley F.H.*, Principles of Logic. N.Y.—L., 1928 (первое издание 1883 г.).

[59] *Darbon A.* Les catégories de la modalité. Paris, 1956. P. 134.

Введение закона противоречия в логику теории, расширяя возможности обоснования теорем «внутри неё» посредством опровержений, всё же сохраняет status quo. Поэтому возникает проблема обоснования и оправдания самой теории. На смену проблемы «непротиворечие в выводах» приходит проблема непротиворечивости теории в целом в качестве критерия её практической значимости, поскольку непротиворечивость абстрактной теории влечёт возможность её модельной выполнимости (теорема Лёвенгейма — Скулема), то есть создаёт условия для изучения модели (если такая будет указана) средствами логики этой теории. Одновременно в силу наличия модели непротиворечивость означает также логическую возможность считать такую теорию осмысленной[60].

Вместе с тем непротиворечивость теории, указывая на возможность модели для этой теории, одновременно указывает и на ***границы применимости её основных абстракций***, поскольку для большинства дедуктивных теорий с достаточно простым понятием выводимости их непротиворечивость влечёт их неполноту, то есть указывает на факт существования суждений, формализуемых в языке данной теории, но недоказуемых в ней. Об этом говорит первая теорема Гёделя. Почти все теоретически значимые дедуктивные теории (за исключением чистой элементарной логики) отличаются их неполнотой. В этом — ***интервальный смысл*** всякой достаточно богатой содержательной теории. Ведь совместная реализация непротиворечивости и полноты была бы свидетельством ***абсолютной самобоснованности*** их основных абстракций. На деле же непротиворечивость таких теорий может быть обоснована только средствами, которые не являются собственными средствами этих теорий — не формализуемы (не выразимы) в них. Об этом говорит вторая теорема Гёделя.

1.6. Непротиворечивость и интервал абстракции

Как бы ни было велико его значение, факт непротиворечивости не следует рассматривать как априорное условие научной ценности теории. Научную ценность могут представлять и противоречивые, но нетривиальные теории. Если в числе теорем (аксиом) теории отсутствует ex falso sequitur quodlibet, то противоречивость не обесценивает ни понятие теоремы теории, ни понятие доказательства в ней.

---

[60] Об этом см. ст.: Непротиворечивость // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967.

В этом случае наличие противоречия становится всего лишь ***посторонней посылкой***, которая не влияет на законные выводы этой теории. Поэтому ультраинтуиционизм, для которого программа изучения доказательств противоречивых теорий представляет научный и философский интерес, не исключает из общей теории дедуктивных систем и изучение противоречивых систем, мотивируя это тем, что такое изучение может содействовать изучению общих дедуктивных свойств непротиворечивости теорий или нахождению новых методов доказательства непротиворечивости.

Наиболее глубокая, из известных мне концепций, связывает вопрос о непротиворечивости с вопросом о допустимых способах рассуждений, а не только с принципиальной недопустимостью противоречий. Способов рассуждений, допустимых, так сказать, абсолютно не существует. Всякое доказательство от каких-либо допущений (гипотез) зависит. Впервые я воспринял это как философский постулат ультраинтуиционистской программы[61], согласно которой доказательства непротиворечивости также зависят от каких-либо допущений, вопрос о тривиальности (очевидности) или нетривиальности которых решается путём произвола.

Всё же замечу, что de jure допустимость должна определяться характером «логики вещей», о которых рассуждают (или хотят рассуждать). Чтобы судить о наличии противоречия, необходимо располагать средствами получения противоречий и более того — знанием о ***достижимости противоречия*** этими средствами. К примеру, непредикативные определения обычно рассматривают как логическое средство получения антиномий, а парадокс Рассела — как свидетельство достижимости противоречия с использованием этого средства. С тех пор едва ли не общепринято считать, что из парадоксального рассуждения «формально и содержательно следует неразрешимое противоречие: $A \,\&\, \neg A$»[62].

Действительно, противоречие обычно мыслится либо как одновременная доказуемость суждений A и $\neg A$, либо как доказуемость их конъюнкции (о чём и говорится выше). Вместе с тем сами парадоксальные рассуждения выглядят по-иному. Они имеют вид конъюнкции пары содержательно выводимых симметричных импликаций (($A \supset \neg A$) и ($\neg A \supset A$)). Если мы уже имеем противоречие в виде $A \,\&\, \neg A$, то соответствующие импликации мы получаем непосредственно как следствия дедуктивного отношения $\& \vdash \supset$. Однако конъюнкция и

---

[61] См.: *Есенин-Вольпин А.С.* Парадокс // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967.
[62] *Зенкин А.А.* Новый подход к анализу проблемы парадоксов // Вопросы философии. 2000. № 10. С. 79.

импликация не равны дедуктивно. Поэтому мы не можем воспользоваться обратным отношением. Правда, у нас есть возможность непосредственно получить эквивалентность $A \equiv \neg A$. Но эта эквивалентность не даёт нам основания считать доказанными равным образом как A, так и $\neg A$, а утверждает лишь их условную зависимость по истинности. Поэтому, чтобы получить желаемое противоречие как конъюнкцию, необходимо парадоксальное умозаключение присоединить к какой-либо логике и дать обычное доказательство из аксиом. А это уже чисто технический вопрос. Например, такое доказательство возможно с использованием аксиомы Зенона, упомянутой выше или с помощью закона тождества и аксиомы силлогизма. Однако я хочу заметить, что сама конъюнкция $((A \supset \neg A)$ & $(\neg A \supset A))$ не принадлежит чистой логике (она недоказуема в ней). Поэтому мне непонятно, почему мы должны рассматривать факт парадоксальных умозаключений (в частности, парадокс Рассела) как угрозу, которая каким-либо образом затрагивает основания логики. На мой взгляд, его можно рассматривать как кризис философии логицизма, но логика логицизма (теоретико-множественная логика), лежит за пределами фактически значимых абстракций чистой элементарной логики.

Как известно, «критерий основания» Протагора связывал допустимость с мнением человека, однако не уточнял основания для этого мнения, на что Платон заметил (как уже отмечалось выше), что основание не должно быть произвольным или заключаться в субъективной воле человека, иначе придётся признать законность противоречий. Эта мысль Платона была «законсервирована» в аристотелевском логическом принципе противоречия и, уже в современной концепции оснований (школой Гильберта), — в методологическом требовании доказательства «абсолютной непротиворечивости» математических теорий.

Однако вполне уместная в области «истин разума» идея непротиворечивости не всегда оправдана в области «фактических истин». Перенесённая из области логики в другие области знания, основанные на других абстракциях, она породила особый «стиль мышления», игнорирующий диалектику ***интервальных ситуаций***, в которых критерий Протагора, понятый, однако, более широко, как относительность истины к условиям и средствам её познания, оказывается весьма существенным. Именно поэтому многие рассуждения, приводящие к парадоксам, но в остальном безупречные, по существу только демонстрируют интервальный характер связанных с ними гносеологических ситуаций. Таковы, в частности, известные апории Зенона

Элейского или так называемый софизм «куча»: «Одно зерно — не куча. Если ***n*** зёрен не куча, то ***n* + 1** — тоже не куча. Следовательно, любое число зёрен — не куча». Это лишь один из ***парадоксов транзитивности***, возникающих в ситуациях ***неразличимости*** (или интервального равенства). Последняя служит типичным примером интервальной ситуации, в которой свойство транзитивности равенства при переходе от одного ***интервала неразличимости*** к другому, вообще говоря, не сохраняется. Поэтому принцип математической индукции в этой ситуации неприменим. Стремление усматривать в такого рода ситуациях свойственное опыту «нетерпимое противоречие» (А.Пуанкаре), которое теоретическая мысль преодолевает в абстрактном понятии математического континуума, не обосновано общим доказательством устранимости подобного рода ситуаций в сфере теоретического (в частности, математического) мышления и опыта. Достаточно сказать, что практика применения столь важных в этой сфере ***законов тождества*** так же, вообще говоря, как и в сфере опыта, зависит от того, какой смысл вкладывают в выражение «один и тот же объект», какими средствами или критериями при этом пользуются. К примеру, далеко не всегда нам удаётся ***абстракцию неразличимости*** заменить ***абстракцией отождествления***. А только в этом случае и можно рассчитывать на «преодоление» противоречий типа парадокса транзитивности[63].

И ещё об одном обстоятельстве, связанном с темой непротиворечивости полезно вспомнить.

Принцип противоречия, в том виде, в каком обычно его излагают (о чём уже говорилось выше) указывает на недопустимость одновременного утверждения (в рассуждении, в тексте или в теории) двух суждений, из которых одно является прямым отрицанием другого. Важно, что этот принцип характеризует особый тип противоположности, исключающей всякую возможность синтеза противоположных сторон (contradictorie oppositum esse). Поэтому принято считать, что отвергаемый им факт противоречия создаёт парадоксальную ситуацию и указывает на неблагополучие в исходных допущениях рассуждения или в ходе самого рассуждения.

Аристотель считал принцип противоречия самым достоверным из всех основоположений, к которому, в конечном счёте, сводится любое доказательство. Эта убеждение Аристотеля получило важное дополнение в математической теории доказательств, когда открыли, что противоречие обесценивает самый факт доказательства, посколь-

---

[63] Я обратил внимание на это обстоятельство в ст. «О некоторых понятиях теории отношений» // Кибернетика и современное научное познание. М., 1976.

ку из противоречивых суждений можно вывести не только то, что мы хотим доказать, но и всё, что угодно. И если мы верим в истинность результатов доказательства, то истинным оказывается всё.

Вот почему три знаменитых его принципа (тождества, противоречия и исключённого третьего) относятся самим Аристотелем не к области диалектики или риторики, а к области доказательства, то есть понимаются как ***законы доказательства***. Это только много позднее (а сегодня и в школьной логике) этим принципам стали придавать психологический смысл, истолковав их как ***законы мышления***.

К сожалению, у Аристотеля можно найти и немало отступлений от чисто логической точки зрения на проблему противоречия. В частности, его экскурсы в онтологию дали повод онтологизировать и принцип противоречия. Оппозиция не заставила себя ждать. Философия особенно пережила это на примере гегелевской диалектики. Но в пылу полемики сторонников формальной и сторонников диалектической логики потерялась существенная деталь вопроса — идея ***дедуктивной непротиворечивости*** теории. Эту, и только эту, идею отстаивает логика.

На примере паранепротиворечивых теорий это более чем очевидно. Допуская противоречия, но убирая ex falso sequitur quodlibet, мы сохраняем идею непротиворечивой дедукции. Поэтому я не вижу оснований, чтобы рассматривать паранепротиворечивые логики как некий «упрёк Аристотелю», или, в некотором смысле, как поддержку тезиса о неуниверсальности закона противоречия.

Если речь идёт о теории, то всё, что необходимо для доказательства её непротиворечивости, это наличие некоторого характеристического свойства, которое мы выбираем сами, руководствуясь содержанием и задачами этой теории. Если все теоремы этой теории (аксиомы входят в число теорем) имеют данное свойство, а их отрицания его не имеют, то такая теория дедуктивно непротиворечива. В ней попросту отсутствуют условия для построения доказательств, приводящих к противоречию.

Вместе с тем с существованием противоречивых, но недоказуемых суждений связана, как известно, неполнота формальной теории. Не исключено, что ни одно из взаимно противоречащих положений, но содержательно осмысленных в ней, не будет доказуемо в данной теории. Тогда мы можем сказать, что эти положения лежат вне интервала абстракций, определяющих формализм рассматриваемой теории. Противоречивые суждения налицо. А противоречия как такового нет. Следовательно, мы можем выбирать любое из них, чтобы пополнить исходную теорию. В результате мы получим две различные теории, но не противоречащие одна другой, а дополнительные.

В этом, собственно, смысл ***принципа дополнительности***. Этот принцип родился в физике. Но он не чужд логике и математике. Примером может служить аксиоматическая теория множеств без аксиом выбора или детерминированности. Добавление любой из последних аксиом к первоначальным порождает две дополнительные теории. Другой, возможно более яркий, пример — непротиворечивое расширение «конструктивной» части системы Цермело – Френкеля добавлением континуум-гипотезы (К.Гёдель, 1938) и такое же непротиворечивое её расширение добавлением отрицания континуум-гипотезы (П.Дж.Коэн, 1963).

1.7. Ультраинтуиционистский взгляд на проблему противоречия

В связи с обсуждаемой выше темой нельзя обойти молчанием некоторые доводы ***ультраинтуиционистской*** программы обоснования математики[64]. Эта программа мне представляется философичнее других программ, а её доводы интересны независимо от того обстоятельства, что они не общеприняты.

Появлению этой программы предшествовали и, на мой взгляд, способствовали, следующие важные этапы развития логической мысли:

1) ранняя статья А.Н.Колмогорова «О принципе tertium non datur» (1925), о которой уже говорилось выше, и в которой он усилил интуиционистскую критику классической аксиоматики логики, выразив сомнение в интуитивной ясности принципа ex falso sequitur quodlibet;

2) сомнения Н.Н.Лузина в однозначности натурального ряда, высказанные им в письме к К.Куратовскому[65];

3) явное указание А.А.Марковым на роль абстракции отождествления (помимо абстракции потенциальной осуществимости) в конструктивном понимании математических суждений (1951);

4) принятое в школе «математических формалистов» априорное понимание тождества объектов формальной теории, независимое от того, идёт ли речь о фактически осуществимых (построенных) объектах или о тех объектах, осуществимость (построение) которых предполагается (считается) возможным на основе классических (традицион-

[64] Подробно эта программа представлена в работах А.С.Есенина-Вольпина, к которым я и отсылаю читателя.

[65] *Лузин Н.Н.* Собр. соч. Т. 2. М., 1958. С. 708.

ных) абстракций теории и независимо от тех предположений об отождествлениях, которыми фактически руководствуются при построении формальных теорий.

Конечно, это только моё предположение. И в принципе не так уж важно, действительно ли повлияли перечисленные выше обстоятельства на формирование ультраинтуиционистской концепции. Важно, что сама эта концепция породила вопрос об изменении классического взгляда на непротиворечивость. Она сделала существенным моментом каждого проводимого доказательства «прослеживание тождества» — операцию отождествления объектов, входящих в это доказательство, предложив по существу новую семантику для формул, в которой смысл каждой формулы связывается с её вхождением в доказательство.

В ультраинтуиционистских теориях осмысленность формулы ($A \mathbin{\&} \neg A$) как факта, выражающего реальное противоречие, предполагает признание тождественности A в обоих вхождениях, то есть по существу выполнение традиционного закона тождества $A = A$, где A не обязательно ***одна и та же*** формула, пока для неё не состоялся соответствующий акт отождествления. Говоря иначе, главное условие интуиционизма для объектов, входящих в доказательство, — их тождественность (если такая утверждается) должна быть явно подтверждена актом отождествления. Если она является только предметом веры, а de facto не установима, или если её установимость влечёт нежелательные последствия для всей теории, то противоречие объявляется только ***кажущимся.***

С этой (как её называет автор — «откровенной») точки зрения доказанность (доказуемость) противоречащих друг другу суждений (формул) или их конъюнкции означает только, что суждение A ***может быть*** отождествлено в обоих упомянутых вхождениях в формулу ($A \mathbin{\&} \neg A$) по правилам отождествления, принятым в этой теории. Но при этом не утверждается, что такое отождествление ***надлежит*** выполнить согласно всем требованиям рассматриваемой теории.

Следовательно, с точки зрения ультраинтуиционистских представлений, тот факт, что в теории имеются обе формулы, как A, так и $\neg A$, ещё не означает, что в ней может быть доказана (или уже доказана) формула ($A \mathbin{\&} \neg A$). А в этом случае по вполне понятным основаниям теория не считается противоречивой.

В ультраинтуиционистских теориях кажущиеся противоречия существенная вещь, поскольку они, вообще говоря, допустимы и в известном смысле безобидны для теории. Напротив, отказ от теорем вида кажущихся противоречий и требование выполнения для них указанного отождествления может повлечь за собой, по правилам этих теорий, появление ***непреодолимого препятствия*** к осуществлению некоторого шага доказательства[66].

Такая ситуация, конечно, не похожа на ту, что мы имеем в паранепротиворечивой логике, в которой противоречие имеет обычный классический смысл и допускается только потому, что главный классический аргумент (ex falso sequitur quodlibet), в купе с которым противоречие представляет угрозу «тривиализации» для логических выводов, либо отвергается, либо существенно модифицируется.

С интуиционистской точки зрения ex falso в форме $\neg A \supset (A \supset B)$ как постулат неубедителен просто потому, что уже предполагает осуществимым противоречие. Между тем возможны ситуации, когда формулы A и $\neg A$ обе доказаны (получены), но это не влечёт доказуемости произвольной формулы, поскольку требования всей теории не допускают отождествления A в обоих вхождениях в формулу ex falso, хотя и допускают возможность такого отождествления в других случаях.

Ситуации с кажущимися противоречиями действительно предусматриваются в некоторых вариантах ультраинтуиционистских теорий. К примеру, такова ситуация в ультраинтуиционистской арифметике, в которой доказательство ***каждой теоремы*** имеет осуществимую (в откровенной интерпретации) длину. В этом случае формула $A \& \neg A$ не может иметь осуществимого доказательства[67].

Конечно, всё это несущественно с точки зрения формалистской концепции оснований математики, которая базируется на абстрактной (абсолютной) идее тождества и противоречия. Но критика классических представлений о тождестве и непротиворечивости как раз и составляет одну из особенностей ультраинуиционистской программы[68].

Считать кажущиеся противоречия нарушением непротиворечивости или нет — это, с точки зрения автора названной концепции, вопрос соглашения. Но, по-видимому, было бы опрометчиво его решать непременно отрицательно, отвергая теории с кажущимися противоречиями на том основании, на котором отвергаются обычно противоречивые теории в смысле традиционной логики и математики[69]. В свете относи-

---

66 *Есенин-Вольпин А.С.* Парадокс // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967. С. 208.

67 См.: *Есенин-Вольпин А.С.* Анализ потенциальной осуществимости // Логические исследования. М., 1959. С. 230.

68 См.: *Есенин-Вольпин А.С.* Математическая индукция // Философская энциклопедия. Т. 3. М., 1964.

69 Подробно со всеми этими интересными идеями и заложенной в них философией анализа можно ознакомится также по ст.: *Yesenin-Volpin A.S.*, The Ultra-intuitionistic Criticism and the Antitraditional Program for Foundations of Mathematics // Intuitionism and Proof Theory: Proceedings of the Conference of Buffalo. North-Holland, 1968.

тельности самого понятия «непротиворечивость» изучение доказательств в противоречивых теориях может представлять определённый интерес и для уточнения свойств непротиворечивых теорий. Не случайно, что Торальф Скулем, автор философской концепции релятивизации математических понятий, был, видимо, первым, кто заявил о допустимости работать с противоречивой теорией при условии, что она лишена какой-либо неясности её основных понятий.

В контексте сказанного нельзя не обратить особого внимания на роль операции отождествления в ультраинтуиционистской концепции. Многими из нас марковская ***абстракция отождествления*** воспринимается как подлинно конструктивная операция, применимая к конструктивным объектам различных видов[70]. Между тем, это отнюдь не самостоятельная абстракция; это способ образования абстрактных объектов в рамках абстракции потнциальной осуществимости, то есть далеко идущая операция, предполагающая в определённом смысле идеализированную (трансцендентную) реальность и тождественность объектов в том же смысле, какой имеют в виду формалисты. Отождествить два объекта в наличной реальности (в наличном опыте) сравнительно легко. Но кто поручится за возможность отождествления в трансцендентной реальности? Этот вопрос в равной мере относится как к неопределённо длинным (фактически неосуществимым) доказательствам той или иной математической теории, так и к тождеству объектов в моделях этих теорий.

Ультраинтуиционистская критика указывает на это обстоятельство, замечая, что если тождество двух объектов (например, двух слов в алфавите), данных воочию, является эмпирическим фактом и не вызывает сомнений, то тождество объектов (формул), участвующих в бесконечном процессе (например, в случае применения в доказательстве бесконечной индукции) является по существу гипотезой и вовсе не очевидно.

Таким образом, полный анализ доказательства требует явного указания на возможность отождествления (или различения) объектов, участвующих в доказательстве. При этом не может быть вопроса об отождествлении объектов пока они не представлены в наглядных (осуществимых с некоторой квази-эмпирической точки зрения) шагах доказательства. И это столь же очевидно, как очевидна невозможность постройки дома, если отсутствует необходимый строительный материал.

---

[70] *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972.

И ещё одно, не менее важное, обстоятельство стоит отметить. Конструктивная абстракция отождествления служит способом построения абстрактных понятий. Это её содержательный гносеологический аспект. Но у этой абстракции есть и формальный аспект, который, собственно, и оправдывает её применение. Этот формальный аспект выражается в трёх свойствах (аксиомах) равенства — рефлексивности, транзитивности и симметрии. Этот формальный аспект (известный со времён Евклида) роднит абстракцию отождествления с классическим ***принципом абстракции***.

Замечательно, что ультраинтуиционистская критика не выставляет этих формальных свойств в качестве обязательных свойств для актов отождествления. Ни транзитивность, ни симметрия, вообще говоря, не предполагаются, хотя потребность в соответствующем анализе не исключается. В частности, когда транзитивность тождества нарушается при попытках отождествления A в его вхождениях в формулу $A \& \neg A$, можно обоснованно говорить, что смысл A различный в обоих вхождениях.

Не моя задача выяснять, как всё это сказывается на ультраинтуиционистской теории доказательств. Для меня сама теория важна как философская попытка (более последовательная, чем интуиционизм или конструктивизм) проанализировать основания математики, так сказать, ad hominem. Для меня существенна очевидная в ней тенденция, — с одной стороны, к ослаблению общих логических условий, налагаемых на отождествление объектов, а с другой, — к более жёсткому требованию фактических условий на их отождествление. Думается, что, при соответствующих разъяснениях, ультраинтуиционистская программа вполне совместима с теми установками на практику отождествлений, которые сложились в рамках философии интервального анализа[71].

В частности, когда речь идёт об отождествлениях объектов в тех или иных вхождениях в доказательство, абстракцию отождествления, которая, вообще говоря, в этом случае не исключается, всё же естественно отделять от ***абстракции неразличимости.*** Последняя абстракция принята в рамках интервального анализа с целью уточнения понятий о ***тождестве*** и ***различии*** в ситуациях, когда отсутствует априорная информация об ***индивидуации*** объектов универсума (предметной области), а процессы их отождествления или различения определяются конечной информацией об их наблюдаемых состояниях. Обычно это означает зависимость суждений о тождестве и различии от информационных условий познания, в частности, — от разрешающей способности актов восприятия, свойственных наблюдателю или какой-либо иной информационной системе. При этом, принимая во

---

[71] Об интервалной концепции подробно см. первую часть этой книги (М., 2000).

внимание неизбежную «энтропию опыта», тождество по неразличимости является естественным обобщением классической идеи тождества неразличимых (принципа тождества неразличимых) на эмпирические условия познания или, по крайней мере, на ***субъективированные*** акты отождествлений, чем и оправдывается необходимость введения специального термина «абстракция неразличимости».

Хотя выше, в связи с интуиционистской логикой, и говорилось об эмпирической математической логике, всё же с интервальной позиции претензии на математику как дисциплину, в конечном счёте, опытную, стоящую на экспериментальном фундаменте, выглядят неубедительно. К примеру, эмпирический фактор наблюдаемости (соответственно, эмпирический смысл операций сравнения (измерения) и их результатов) в конструктивной математике принимается лишь формально, поскольку вовсе не учитываются особенности «пороговых свойств» этого фактора. Поэтому, если конструктивную позицию ещё можно как-то согласовать с абстракциями, принятыми в классической физике, то её согласование с абстракциями, необходимыми, скажем, в квантовой физике, весьма проблематично[72]. Однако для меня очевидно по крайней мере одно: интуиционизм, ультраинтуиционизм и конструктивизм — это теории ad hominem в позитивном значении этого аргумента.

1.8. Непротиворечивость и «собственный универсум» логики

Теперь, и в связи с проблемой непротиворечивости, и в связи с проблемой отождествлений, я хочу сделать несколько замечаний по теме «предметная область» (или «универсум рассуждения»)[73], поскольку эта тема является одной из важнейших в логике и логической семантике. Существуют различные концепции предметной области, различные точки зрения на это понятие, а их общая идеология тесно связана с техникой логического анализа. Но я затрону здесь лишь один вопрос, которого я однажды касался, но касался мимоходом в связи с обсуждением проблемы тождества[74].

---

[72] Хотя попытки такого рода имеются. См.: *Destouches J.L.* Sur la mécanique classique et l'intuitionnisme // Koninklijke nederlandse akademie van wetenschappen. Series A. Vol. LIV, № 1, 1951.

[73] Из отечественных мне знакомы только две работы, посвящённые этой теме специально: *Бирюков Б.В.* Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике. М., 1963; *Бессонов А.В.* Предметная область в логической семантике. Новосибирск, 1985.

[74] См.: Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970. С. 239.

Прошло время, когда логика считалась наукой «обо всём» по крайней мере в том смысле, что это наука о законах мышления, а законы мышления непременно должны соблюдаться (быть значимы), о чём бы ни шла речь. Тяжба формальной логики и диалектики в данном случае несущественна, поскольку идеологией обеих был панлогизм. Естественно, что универсум речи чистой логики при этом представлялся любым, оставаясь «полностью неопределённым, совершенно неограниченным или открытым»[75].

С появлением математической логики такому подходу способствовал расселовский логицизм. Исключением единичных объектов (в пользу индивидных дескрипций) онтология по существу была элиминирована из логической теории. В её логицистском варианте логика поглощала и математику, сводя её к системе формальных импликаций, «верных вообще во всех «возможных мирах», и потому ничего не говорящих нам о мире, в котором мы живём и действуем»[76].

Точнее было бы сказать, что логицизм был не против онтологии самой по себе. Он ратовал лишь за невмешательство логики в её онтологический статус в связи с его неопределённостью и туманностью. Логицизм жертвовал онтологией в пользу лингвистического анализа как вещи более надёжной и более соответствующей точному характеру логической науки.

Понятно, однако, что с потерей онтологии терялась проблема истинности в её содержательном понимании, характерном, к примеру, для естествознания. Что это значило для логики легко понять, если согласиться с мнением Фреге, считавшего познание законов истинности основной проблемой логики. Вернуть эту проблему для логики на ранних этапах её развития помог интуиционизм, для которого постановка этой проблемы необходимо связана с существованием внешнего мира. Правда, определение истинности варьирует согласно философской точке зрения, но оно неизменно предполагает некоторую концепцию реальности; и здесь, замечает А.Гейтинг, мы приходим к тому, что логика для её интерпретации нуждается в онтологии[77].

Похоже, что сегодня мы избавлены от прошлых «неопределённостей роста». Общие вопросы онтологии перешли в ведомство философской логики и, следовательно, остались предметом для философских дискуссий. А что касается универсума речи (или предмет-

---

[75] Эти слова Э.Шрёдера цит. по кн.: *Бирюков Б.В.* Крушение... М., 1963. С. 39.

[76] *Яновская С.А.*, Логицизм // Философская энциклопедия. Т. 3. М., 1964. С. 228.

[77] *Heyting A.*, La conception intuitionniste de la Logique // Les Etudes philosophiques. № 2. 1956. P. 226.

ной области), то он, сделавшись неотъемлемой частью теории моделей, приобрёл вполне определённые черты. Теперь он занимает почётное место в (предикатной) сигнатуре той или иной модели (реальности), о которой идёт речь, и в этом смысле (характером заданных предикатов и аксиом) вполне избавлен от неопределённости, на которую указывал Шрёдер, даже если на природу универсума не накладывается никаких конструктивных ограничений.

Тем не менее, существенно, что универсумы моделей, о которых идёт речь в теории моделей, и которые служат для определения истинности формул логического языка, сами-то, вообще говоря, лежат вне чистой логики. Это именно та внешняя реальность, которая подразумевалась в приведённом выше замечании Гейтинга. При этом естественно возникает вопрос, а есть ли у чистой логики «собственный универсум»? Является ли эта логика сама по себе онтологической теорией или же это чисто гносеологический (неонтологический) феномен?

Говоря о «чистой логике», я имею в виду элементарную логику (то есть чистую первопорядковую логику предикатов с равенством) не только потому, что она лежит в основе изучения всех основных математических теорий, которые формализуются в языках первой ступени, но прежде всего потому, что с непротиворечивостью именно узкого исчисления предикатов естественно связывается понятие о собственном универсуме.

Если иметь в виду понятие об универсуме (о предметной области) вообще, то необходимость в его точной характеризации возникает в связи с необходимостью введения понятия модели при семантической интерпретации первопорядкового языка. А до этого момента считается вполне достаточным (чтобы оправдать dictum de omni) постулат о непустоте универсума речи, который в этом случае мыслится совершенно неопределённым. Как замечает Дж.Шенфилд, это в сущности только соглашение, оно является чисто «техническим соглашением», которое «не исключает ни одного интересного случая»[78].

Вопрос об «интересных случаях» — это вопрос особый. Возможно, что логика с пустым универсумом тоже случай интересный[79]. И случай с одноэлементным универсумом для меня тоже случай интересный. Его-то я и собираюсь обсудить ниже.

---

[78] *Шенфилд Дж.* Математическая логика. М., 1975. С. 25.

[79] Я изучал логику неразличимостей именно как (бескванторную) логику с отношениями неразличимости, заданными «ни на чём». А вопрос о правилах для кванторов при пустом универсуме тоже интересный вопрос, который обсуждался неоднократно.

Для начала замечу, что, ограничиваясь чистой логикой, мы должны признать очевидный факт — реальная онтология вносится в процедуру интерпретации извне, а не является частью самого первопорядкового языка, у которого по существу нет «внутренней семантики». Если же мы хотим иметь нетривиальную онтологию самой логики как проекцию логического языка, мы должны расширить язык таким образом, чтобы он содержал индивидные символы и индивидуальные предикаты, определяющие и различающие элементы универсума, то есть характеризующие самый этот универсум. Когда это делается, вместо чистой логики мы получаем прикладную.

Все проблемы философской онтологии и логической семантики, включая логические парадоксы и так называемые проблемы «существования» и «онтологической относительности», ставятся и решаются в прикладной логике. Это очень важное обстоятельство, о чём я ещё скажу ниже.

Казалось бы, что и проблему непротиворечивости первопорядковой логики тоже стоит отнести сюда, то есть поставить непротиворечивость в зависимость от числа и характера индивидов универсума. С ультраинтуиционистской точки зрения это тоже, кажется, должно быть так. Но мы знаем, что там речь идёт не о чистой логике, а о прикладной логике — о теории множеств. А об этом совсем другой разговор. В чистой первопорядковой логике проблема непротиворечивости, к счастью, решается, так сказать, на пропозициональном уровне.

Впрочем, как отмечают авторы этого решения, значение этого доказательства непротиворечивости не следует переоценивать, поскольку оно *«содержательно* (курсив мой — *М.Н.*) сводится к допущению, что положенная в основу область индивидов состоит только из одного единственного элемента»[80].

А это означает, что редукция к семантическому варианту всё же имеет место и здесь, и вопрос только в том, насколько общим (или убедительным) можно считать такое доказательство.

Чтобы ответить на этот вопрос, как и на те, что были поставлены выше, полезно вспомнить способ рассуждения, который применил А.Эйнштейн, привлекая на помощь двух наблюдателей: одного в вагоне поезда, другого — около полотна железной дороги[81]. Тогда мы поймём, что, как не существует траектории самой по себе, так равным образом не существует и универсума самого по себе, если мы хотим говорить об универсуме, создаваемом языком какой-либо теории.

---

[80] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947. С. 118.

[81] *Эйнштейн А.* Физика и реальность. М., 1965. С. 171-172.

Все, до сих пор известные мне, разговоры о логической онтологии — это разговоры с позиции наблюдателя у полотна железной дороги, с позиции «извне». Я же предлагаю встать на позицию наблюдателя, который находится в вагоне поезда, на позицию «внутри». Применительно к нашей ситуации такой наблюдатель располагает только тавтологиями логического языка. Эти формулы чистой логики сами по себе ничего не говорят о числе (а, следовательно, и о различии) объектов универсума, они ***безразличны*** к какому-либо разнообразию. Но если их использовать как дискриминирующие признаки в актах отождествления (например, согласно обычному определению тождества), то, при условии непустоты «на входе», они дадут ***одноэлементный*** универсум «на выходе». Именно этот универсум, возникающий как результат абстракции отождествления по тавтологическим признакам, я и называю ***собственным универсумом*** чистой логики. В известном смысле его можно назвать и ***виртуальным*** универсумом.

Если мы откажемся от условия непустоты, мы можем использовать в качестве дискриминирующих тождественно ложные формулы. Ситуация окажется тогда симметричной: абсолютная неразличимость сохраняется, но универсум при этом будет пустым. Иначе говоря, мы имеем классическую альтернативу «нуля» и «единицы». Но принять тождественно ложные формулы в качестве определяющих мы не можем в силу принятого для кванторов условия непустоты.

О том, что я не сегодня пришёл к понятию о собственном универсуме чистой логики, напоминает следующий текст: «если условие ***А*** — *тавтология*, то в подразумеваемой предметной области все предметы тождественны в интервале ***А***. Иначе говоря, тавтологии не могут служить критерием различимости объектов, они как бы проектируют универсум в точку, производя абстракцию отождествления элементов множества любой мощности, «превращая» разные элементы в «один и тот же» абстрактный объект»[82].

Хотя такая трактовка онтологического статуса чистой элементарной логики (по существу его непризнание) не совпадает с общепринятой, согласно которой «из общих логических аксиом ничего не вытекает относительно того, какие предметы и сколько их существует в том поле..., к которому относятся наши высказывания и предикаты»[83], я считаю, что понятие о собственном универсуме чистой элементарной логики полезно и сродни тем, что всегда появляются, когда необходимо завершить обобщение уже существующих понятий. Так,

---

[82] *Новосёлов М.М.* Тождество // Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970. С. 239.

[83] *Новиков П.С.* Элементы математической логики. М., 1959. С. 215.

мы говорим, что бесконечно большая величина x_n имеет пределом $+\infty$, хотя на самом деле она не имеет никакого предела. Но $+\infty$ не пустое понятие. У него, как равным образом и у понятия отрицательной бесконечности, есть ясный конечный геометрический образ на окружности фон Неймана. В результате введения этих двух «несобственных» символов реализуется «догма об окружности» — «крайности сходятся» и создаётся наглядный образ замкнутости (совершенства) множества вещественных чисел (известно, что по понятиям древних, окружность — самая совершенная фигура).

Хотя тавтологии не пригодны в качестве «приборов анализаторов» предметных областей, они вполне могут служить в качестве «приборов преобразователей» предметных областей любой природы[84]. И они это делают, ipso facto избавляя нас от противоречий в результате их применения. Вот почему непротиворечивость чистого исчисления предикатов, установленную на одноэлементной области, я считаю достаточной и ***установленной абсолютно***. В качестве следствия, я полагаю, что чистая логика не несёт и не может нести ответственность за противоречия (парадоксы), возникающие при расширении её лексики. При любом таком расширении мы видим гораздо больше, чем собственный универсум логики, поскольку используем для отождествлений и различений уже индивидуальные предикаты. Следовательно, мы находимся в условиях другого интервала абстракции отождествления, чем тот, который дают тавтологии.

Потому-то, кстати, и нельзя построить контрпример для тавтологии. Приступая к построению (поиску) контрпримера, мы становимся на позицию наблюдателя у полотна железной дороги, мы предполагаем заведомое существование источника, из которого в ходе оценки формул мы черпаем необходимые нам определённые и вполне различимые элементы. Мы испытываем формулу, чтобы выяснить, способна ли она различать предметы. И если обнаруживаем, что нет, то объявляем её тавтологией.

К примеру, пусть формула A выполнима, но не является тавтологией. Тогда формула $\neg A$ тоже выполнима и выполнима как раз в универсуме контрпримера для A. Следовательно, выполнимость $\neg A$ эквивалентна высказыванию о минимальном числе «различимых» индивидов, необходимых для построения контрпримера для A. Отсюда мы естественно получаем чисто гносеологическое следствие — суждение, которое даёт информацию о различимости объектов, не может быть ни тождественной истиной, ни тождественной ложью.

---

[84] По терминологии статьи: *Лазарев Ф.В., Трифонова М.К.*, Роль приборов в познании и их классификация // Философские науки (НДВШ). 1970. № 6.

Вместе с тем, ясно, почему теоремы чистой логики обычно выводят из-под юрисдикции общего правила, согласно которому постулирование общезначимости (выполнимости) какой-либо логической формулы равносильно утверждению о числе элементов в универсуме речи. Тут мы называем логическими формулы, которые не принадлежат чистой логике, но сформулированы на её языке.

С другой стороны, если бы тавтологии чистой логики были общезначимы только в собственном универсуме, чистая логика потеряла бы всякий теоретический интерес. Более того, если бы мы допустили такой контрафактический случай, формула $\neg A$ (где A — некая «сумасшедшая» тавтология) потеряла бы статус тождественной лжи. Поэтому добавление A в качестве общезначимой формулы к аксиомам теории, в которой выполнима $\neg A$, приводило бы нас к прямому противоречию. ***Во избежание противоречий виртуальный универсум не должен влиять на действительный универсум модели, когда логика становится прикладной.***

То, что тавтологии могут добавляться в любом случае в качестве общезначимых формул, не порождая противоречий, объясняется их неспособностью различать индивидуальные объекты любого универсума любой модели. В одноэлементном мире, как это я уже заметил однажды, отношения тождества и различия сами неразличимы[85].

Конечно, если некоторую формулу A добавить просто как выполнимую, не постулируя её общезначимость, то возможно, что «внутри» теории, найдутся условия (при различных основаниях для отождествлений) для выполнимости как A, так и $\neg A$. Однако этот факт следует рассматривать не как противоречие, а только как ***дополнительность*** ситуаций, соответствующих этим формулам внутри данной теории. Например, такая ситуация вполне возможна в ультраинтуиционистской арифметике при наличии неизоморфных натуральных рядов. Аналогично, в подходящем интервале абстракции, выделяющем одноэлементную область в (вообще говоря, не одноэлементном) универсуме данной теории, формула может быть общезначима, а её отрицание, естественно, невыполнимо. Но вне этого интервала $\neg A$ выполнима, а A необщезначима. Это наглядно иллюстрируется примером формулы $\forall x \forall y\ (x = y)$, общезначимой только в одноэлементной области. Её отрицание, напротив, k-общезначимо при $k \geq 2$.

Вообще, если формула только k-общезначима, её добавление в качестве $(n + k)$-общезначимой к теоремам теории с областью из $(n + k)$ индивидов при $n \geq 1$ приводит к противоречию. Но добавле-

---

85 *Новосёлов М.М.* О некоторых понятиях теории отношений // Кибернетика и современное научное познание. М., 1976. С. 260.

ние этой же формулы в тех же условиях в качестве только выполнимой (что логически вполне оправдано) отвечает ситуации дополнительности, то есть соответствует одновременной фактической истинности как A, так и $\neg A$ в разных ***интервалах абстракции***. Фиксирование интервалов здесь обязательно, поскольку использование формул, не являющихся тавтологиями, связано с иным применением абстракции отождествления, чем то, которое определяется языковыми средствами чистой логики.

Итак, просуммирую некоторые следствия из сказанного:

1. Собственный универсум элементарной логики существует как гносеологическое понятие — как результат абстракции неразличимости элементов любой наперёд заданной онтологической области индивидов. Поэтому я и называю его ***гносеологическим универсумом***, а чистую логику — ***неонтологической*** теорией.

2. Все теоремы элементарной логики общезначимы в её «собственном универсуме» (тривиальное следствие метатеоремы о полноте).

3. Не каждая формула, общезначимая в собственном универсуме чистой логики, выводима из аксиом этой логики (неполнота в узком смысле).

4. Каждое расширение чистой первопорядковой логики присоединением формул, общезначимых в собственной области, непротиворечиво (следствие доказательства непротиворечивости).

5. Противоречивость теорий (появление парадоксов), основанных на элементарной логике, возможна, в частности, при игнорировании интервалов абстракции отождествления (или неразличимости) за счёт формул, не общезначимых в собственной области.

Всё сказанное может показаться тривиальным. И всё же замечу, что интервальная аргументация, использующая представления «внутри» и «снаружи», позволяет яснее понять отношение чистой формальной логики к онтологии, отделить лингвистические аспекты этого отношения от собственно модельных и гносеологических, и нередко избежать явных недоразумений там, где возникают противоречивые ситуации при совершении тех или иных актов отождествлений. А этим, в частности, решается и философская задача — показать, что «онтология гносеологична», и сделать «онтологические предпосылки... как можно более осмысленными»[86].

---

[86] *Бердяев Н.А.* Философия свободы. Смысл творчества. М., 1989. С. 101.

ГЛАВА 2. АБСТРАКЦИЯ И ЛОГИКА ТОЖДЕСТВА

Великие принципы *достаточного основания* и *тождества неразличимых* придают метафизике новый вид.

Готфрид Лейбниц
«Ответ на третье возражение Кларка»

Всё зависит от установления смысла равенства.

Готлоб Фреге
«Основоположения арифметики»

Слова Фреге, поставленные здесь в эпиграф, стоит извлечь из арифметического контекста и сделать весьма общей аксиомой. Нет науки, где дело обстояло бы иначе. Однако стоит принять во внимание и другую аксиому Фреге, а именно, зависимость значения понятия от его вхождения в контекст.

Эти две модальности — всеобщность и частность значения понятия тождества я и собираюсь обсудить ниже. Как дилетант в математике я, возможно, рискую пропустить что-либо важное в этой теме для математиков. Недаром же Фреге считал, что там, где дело идёт о тонкости в строении понятия, наибольшие шансы на успех имеет математика, которую во внимании к этим тонкостям «не могут превзойти ни наука, ни сама философия»[1]. Но понятие тождества исторически принадлежит также логике и философии. Поэтому, как философ и методолог, я питаю некоторую надежду на успех, ведь даже вне самых «модных» областей мыслительной деятельности, в области давно изведанной и привычной — в методологии познания, абстрактные описания (объекты) остаются ключевыми элементами научного языка. И одной из важнейших в связке научных абстракций является ***абстракция тождества*** (identitas notionum).

Возможно, что идея этой абстракции лучше всего выражена в её онтологическом замысле: ограничить разнообразие до эффективно обозримых пределов. В противном случае мир был бы не-

---

[1] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000. С. 18.

мыслим, ибо уже простое сравнение (известно, что всё познаётся в сравнении) сводится к двум элементарно необходимым познавательным операциям — различению и отождествлению.

Этим двум операциям посвящена пятая глава первой части моей книги. Но отождествить, это ещё не значит определить тождество. Вот почему я не готов согласиться с точкой зрения, согласно которой «для тождества существен не способ, каким оно определено (его смысл), а реальная (sachlich) область его значимости»[2]. Смысл тождества как понятия даётся определением. И тем же определением очерчивается область его значимости, создаётся возможность суждений о тождестве. Способ определения и задаёт область значимости. Чтобы последняя стала ясной, необходимо прежде ответить на вопрос: когда мы действительно (а не по соглашению) имеем право говорить о тождестве, или иначе, что же такое тождество вообще, что мы понимаем под термином «тождество»?

Сегодня любой математический логик без труда напишет аксиомы, определяющие предикат тождества, что лет полтораста назад было бы неразрешимой проблемой. Но, отвечая на вопрос о тождестве, недостаточно сформулировать соответствующие аксиомы. Такой ответ будет прозрачным синтаксически, но он не будет прозрачным семантически и гносеологически. Сколько-нибудь полная философская концепция тождества обязана учесть подходящую семантику для исчисления тождеств (равенств). А она предполагает по крайней мере три аспекта осмысления этого понятия: онтологический, гносеологический и лингвистический. Не случайно дискуссии о тождестве время от времени всё ещё возобновляются в философской среде[3].

Онтологический аспект подразумевает тождество реалий в их объективном смысле. В этом случае речь идёт о тождестве предметов, а не знаков (или имён предметов), независимо от того, чем являются сами эти предметы. Говоря «*x* и *y* тождественны, когда они обо-

---

[2] *Вейль Г.* Математическое мышление. М., 1989. С. 107.

[3] См.: *Geach P.T.* Identity // The Review of Metaphysics. V. XXI, N. 1, 1967; *Feldman F.* Geach and Relative Identity // The Review of Metaphysics. V. XXII, N. 3, 1969; *Geach P.T.* A Reply // ReviewE. V. XXII, N. 3; *Feldman F.* Leibniz and «Leibniz Law» // Philosophical Review. LXXIX, 1970; *Odegard D.* Identity through time // American Philosophical Quaterly. V. 9, N. 1, 1972; *Stevenson L.* Relaive identity and Leibniz Law // Philosophical Quaterly. V. 22, N. 87, 1972; *Griffin N.* Relative Identity, Oxf., 1977; *Brennan A.* Condition of Identity, Oxf., 1988.

значают один и тот же предмет», мы выносим за скобки вопрос о реальности, которая нередко остаётся некоторой туманной абстракцией, хотя в теории моделей или в семантическом толковании формального языка эта абстракция всегда присутствует.

Например, обычно мы оправдываем равенство «2 = 1 + 1», исходя как раз из этой абстракции. Мы цифру «2» и выражение «1+1» рассматриваем как различные обозначения одного и того же числа «два», которое уже не принадлежит языку этих обозначений. Но если считать, что понятие «натуральное число» исчерпывается его цифровой записью (например, словом в алфавите «|»), а тождество (символ «=») понимается как графическое равенство записей, то приведённое выше толкование тождества уже не годится. В этом случае цифры (или слова из палочек) берутся не как знаки каких-то объектов, а как самостоятельные объекты sui generis. Здесь универсум не ***за*** реальностью языка, а ***в*** самой этой реальности. Это обычная ситуация для ***исчислений*** в отличие от ***формальных систем*** или формализованных языков. В отличие от формальной системы как совокупности теорем или формального языка, имитирующего нечто из онтологических сущностей, исчисление — это чисто лингвистическая конструкция, не предполагающая второго плана реальности. Здесь тождество верифицируется построением и по существу определяется от противного: если способ построения объектов различен, то различны и сами объекты.

Фреге не одобрял таких «отождествлений по построению». Он считал их слишком очевидными и оттого неплодотворными. Для него все важные применения тождества «основываются на том, что нечто можно отождествить, несмотря на то, что это нечто задаётся различными способами»[4].

Конечно, при аккуратном проведении рассуждений смешение онтологического и лингвистического аспектов тождества можно избежать. Но в принципе такое смешение не исключается, а, следовательно, не исключаются и ***парадоксы отождествлений***.

В частности, принято считать, что свойства предиката тождества инвариантны по отношению к его аспектам. Так, при достаточно вольном подходе мы считаем описания одного и того же объекта одинаковыми и, следовательно, симметричными, абстрагируясь от порядка их появления (или порождения), от возможного предпочтения

---

[4] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000. С. 92.

описаний и пр. Однако в отношении описаний такой подход не является бесспорным[5]. Например, в естественном языке синонимы предпочтительно располагать в ряд, упорядочивая их в зависимости от полноты или точности описания.

Аналогично обстоит дело и с «равенствами по определению». Если не с точки зрения синтаксиса, то с точки зрения семантики роль определяемого и определяющего различна в «актах осмысления» определений, что, вообще говоря, ставит под сомнение симметричность этого равенства в контексте языка исследователя (метаязыка).

Наконец, гносеологический ответ на вопрос о тождестве предполагает информацию о реализуемости (осуществимости) логических условий в рамках наличных познавательных средств. К примеру, подразумевая возможность различных описаний одного и того же объекта (иначе зачем бы нам понадобился предикат «$x = y$»?) и одновременно выставляя условие, что всё, сказаное об x, должно быть сказанно и об y, мы рискуем попасть в парадоксальную ситуацию, если не уточним смысл выражения «один и тот же». Когда речь идёт о ситуации idem numero, вопроса не возникает. А когда речь о ситуации в смысле idem species? Для тождественных в этом смысле (в контексте применяемой абстракции отождествления) не все их свойства могут совпадать. Для эмпирических тождеств, где решающую роль играет абстракция неразличимости, это тем более очевидно[6].

Следовательно, с гносеологической точки зрения существенна связь логики и опыта, логически возможного (допустимого) и фактически осуществимого, когда представление о логических условиях дополняется наличной информацией о действительности, об осуществимом «порядке вещей». В этом случае логика становится прикладной, она покидает независимую от опыта значимость в пределах её собственных абстракций (в смысле формального языка и формальной онтологии), и приобретает эпистемологическую значимость в пределах опыта. При этом семантическое поле чисто логических понятий преобразуется в семантическое поле эмпирических образов.

---

[5] См. например: *Бахтияров К.И.* Парадоксальные ситуации и проблема переходных состояний // Философские науки. 1981. № 3.

[6] Коротко об этой абстракции см.: Новая философская энциклопедия. Т. 1. М., 2000. С. 20.

2.1. Принцип тождества. Уточнение первое

Для начала воспользуемся традиционным понятием, которое чуть ли не повсеместно именуют законом (принципом) мышления. В подтверждение приведу цитату из знаменитого автора: «Закон тождества обычно выражается формулой $A = A$. Этот закон считается высшим принципом мышления. Об этом законе мы попробуем немного поразмышлять. Ведь благодаря этому закону мы могли бы узнать, что такое тождество»[7].

Соглашаясь с последним предложением этой цитаты, попробуем, однако, немного поразмышлять и сами.

Прежде всего остановимся на формуле $A = A$. Заметим, что эта формула появилась много позже самого закона, по крайней мере не ранее того, когда был введён в математику символ равенства. А это случилось в середине XVI в. (Robert Recorde, 1510-1558). Даже Лейбниц для выражения принципа тождества не пользовался символом равенства. Следовательно, формула этого принципа первоначально должна была быть другой.

Она и была другая. Она говорила не об отношении, а об объектах (терминах) этого отношения. Хайдеггер прав, замечая, что формула $A = A$ говорит о равенстве, а не о тождестве в его исходном значении. Подлинный первоначальный (силлогистический) смысл принципа тождества был метафизический и выражался формулой *A* есть *A*, то есть всякое *A* «само есть то же самое», независимо от того, идёт ли речь о вещах, понятиях или суждениях. Именно в этой его метафизической (парменидовской) форме принцип тождества, связанный с философской категорией бытия, стал предметом критики для спекулятивной диалектики немецких романтиков, а позднее — объектом обсуждения и толкования у логиков девятнадцатого столетия, за исключением тех, кто тогда уже начинал строить формальный аппарат математической логики.

К сожалению, отправляясь от формулы $A = A$ с намерением узнать, что же такое тождество, Хайдеггер, как и многие его предшественники, забрёл в метафизический лес. Всё, что он далее говорит о тождестве, вполне соответствует «тёмной сжатости его мышления»[8].

---

[7] *Хайдеггер М.* Разговор на просёлочной дороге. М., 1991. С. 69.

[8] *Хюбшер А.* Мыслители нашего времени. М., 1994. С. 203.

Поэтому нет смысла это обсуждать. Лучше, оставив в покое метафизику, задуматься над тем, почему Аристотель, самый талантливый ученик Платона, обошёл стороной платоновскую идею тождества в её нетривиальном гносеологическом аспекте. В онтологическом аспекте Аристотель ограничился принципом самотождественности: «тождественным... в самом прямом смысле я назвал то, что по числу одно»[9]. В логическом аспекте Аристотель ввел идею тождественности в формулировку закона противоречия и указал на связь закона исключённого третьего (tertium non datur) и равенства: «всё, чтобы мы ни взяли, это — или есть равное, или не есть равное»[10]. При этом он различил предикаты «быть равным», «не быть равным» и «быть неравным».

Этим аристотелевским указаниям долгое время следовала и традиционная (школьная) логика, пока современная логика не поставила под сомнение principium exclusii tertii для равенства и не утвердила взаимную независимоть (в семантическом смысле) трёх законов мышления — тождества, противоречия и исключённого третьего.

Кажется, что у Платона Аристотель не взял ничего для характеризации понятия тождества. Возможно, это произошло потому, что сам Платон не отделил явно логический аспект тождества от метафизического аспекта, который у Платона был связан с его онтологией («теорией идей»), отвергнутой Аристотелем. В частности, к Платону восходит пресловутая инициатива связывать категории «тождество» и «покой», полагая, что движение и тождество исключают друг друга[11]. Как и Гераклит, Платон отрицал тождество in rerum natura, полагая, что в мире чувственного опыта всё непрерывно изменяется. И всё же он не отрицал саму возможность говорить о равных предметах опыта, но только в смысле грубых приближений к идее. В этом контексте он формулирует методологически важное условие: «мы непременно должны знать равное само по себе до того, как впервые увидим равные предметы»[12]. Иначе говоря, понятие о тождестве (равенстве) априорно, а узнавание (распознавание) тождества апостериорно.

---

[9] *Аристотель.* Вторая аналитика, кн. 7, гл.1, 151b 39 // *Аристотель.* Соч. Т. 2. М., 1978. С. 495.

[10] *Аристотель.* Метафизика, кн. X, гл. 4, 1055*a* 31— 1055*b* 27.

[11] См.: *Платон.* Соч. Т. 2. М., 1970. С. 369.

[12] *Там же.* С. 36.

Любопытно, что даже такой вдумчивый исследователь античной логики, как А.С.Ахманов[13], не обратил внимания на эту идею Платона. Между тем, именно Платону принадлежит важнейшая для теории тождества мысль о том, что суждения о тождестве и понятие тождества (тождество «само по себе») — это далеко не одно и то же. Повторю: если первые входят в систему познания a posteriori, то второе — a priori как необходимое условие для первого[14].

Эту платоновскую мысль я и постараюсь уточнять в дальнейшем изложении этой главы[15].

2.2. Принцип тождества. Уточнение второе

В начале своей знаменитой книги С.К.Клини отмечает полезность изучения натурального ряда для «выяснения основ наших рассуждений о натуральных числах»[16]. Однако Клини не оговаривает, что среди этих основ содержатся, по крайней мере, две важные абстракции — абстракция индивидуации и абстракция тождества, представленные в форме двух аксиом Пеано. Поэтому здесь стоит сказать об этих абстракциях несколько слов.

«Когда мы выписываем натуральный ряд чисел

0, 1, 2, 3, ...,

— говорит Клини, — мы предполагаем, что точки «...» указывают на продолжение последовательности за указанные несколько её членов»[17]. А далее он поясняет, что эта последовательность может быть продолжена с помощью операции «следующий за», которая является первичной относительно функции «$n + 1$».

Разумеется, из того, что объекты «могут быть порождены» с помощью операции «следующий за» вовсе не следует, что они «уже порождены» с помощью этой операции или каким-то иным образом. Но, если толковать буквально (в прошедшем времени) известное изречение Кронекера, которое, между прочим, приводит и Клини, то последнее не исключается. Иными словами, не противореча (обычно толкуемому в антиканторовском духе) изречению Кронекера, натуральный ряд вполне позволительно мыслить в виде готовой сово-

---

13 *Ахманов А.С.* Логическое учение Аристотеля. М., 1960.

14 *Платон.* Соч. Т. 2. М., 1970. С. 36.

15 Кратко я уже обращал внимание на неё в одноимённой статье о тождестве: см.: Большая советская энциклопедия. Т. 26. М., 1977. С. 31 (79).

16 *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957. С. 25.

17 *Там же.* С. 25.

купности, что обычно и делается со ссылкой на аксиому индукции. Хотя это замечание покажется тривиальным, для названных выше абстракций оно представляется существенным.

В самом деле, выбор унарной операции «следующий за» вместо «более обычной» функции «$n + 1$» оправдывается отнюдь не только соображением удобства. Я не уверен в том, что «Операция *приписывания* чёрточки к натуральному числу *есть не что иное, как* знакомая нам с детства операция *прибавления* единицы к натуральному числу»[18] (Курсив везде мой — *М.Н.*). Если бы эти операции совпадали, то отпала бы необходимость рекурсивно определять сложение (в отличие от интуитивно принимаемой операции «следующее за») и доказывать его единственность для индукционной модели Пеано[19].

Не случайно именно с операцией «+» Эмиль Борель связывал вопрос об однозначности натурального ряда, отмечая, что вовсе не одно и то же, прибавляем ли мы 1 к 1, чтобы получить 2, или прибавляем 1 к 2, чтобы получить 3. «У нас нет *естественных* оснований претендовать на то, чтобы операцию, посредством которой мы переходим от 1 к 2 и от 2 к 3 рассматривать как *одну и ту же* операцию; всё зависит от точки зрения, с которой мы их рассматриваем»[20] (Курсив всюду мой — *М.Н.*). А это вопрос о том, какой абстракции отождествления в том или ином контексте подчиняется операция «+».

Но в любом случае нам остаётся только верить в наши ***гипотезы существования***. В самом деле, если мы мыслим натуральный ряд в виде готовой бесконечной совокупности, это будет верой в уже выполненную индивидуацию (однозначную определённость) всех его элементов. Если же мы мыслим натуральный ряд in statu nascendi в рамках абстракции потенциальной осуществимости, у нас не более оснований считать эту операцию «всюду определённой» на множестве, которого ещё нет, и никогда в готовом виде не будет. Следовательно, в рамках конструктивных представлений однозначность натурального ряда — это такой же предмет веры, как и в рамках классических[21].

---

[18] *Марков А.А.* Элементы математической логики. М., 1984. С. 11.

[19] См.: *Генкин Л.* О математической индукции. М., 1962.

[20] *Borel E.* Leçon sur la théorie des fonctions. Paris, 1928. P. 146.

[21] Это может служить ещё одним аргументом для ультраинтуиционистской критики.

Замечу, наконец, что операция «следующий за» по существу не является арифметической. Это гипотеза о существовании ***точно одного*** числа, следующего за данным. Представляя эту гипотезу в форме операции, мы естественно сводим вопрос о тождестве к вопросу об индивидуации элементов натурального ряда путём их порождения[22]. А это соответствует мысли Х.Зигварта, что «в *понятии самой единичной вещи* содержится, с одной стороны, единственность (читай: индивидуация — *М.Н.*), а с другой — тождество самой себе»[23]. Следовательно, допущение тождественных себе вещей в традиционной (аристотелевской) форме ***a = a*** является a priori реализованным в понятии универсума натуральных чисел. В этом смысле естественно считать, что по содержанию традиционный закон тождества соответствует «возможности различения элементов индивидной области»[24].

Подобно операции «следующий за» тождество в форме ***a = a*** не относится к арифметике как теории. Это своего рода логический вариант абстракции индивидуации. Без него вообще нельзя обойтись в любой интерпретации формального языка. Нельзя задать область интерпретации для предметных переменных этого языка, не предположив заведомо индивидуацию её элементов в форме закона ***a = a***. A priori связанная с процессом исходного порождения универсума (предметных областей) индивидуация, равно как и натуральный ряд, остаётся объектом философских обсуждений. «Вопрос о том, что, собственно говоря, представляют собой числа, касается больше философа, чем математика, и является предметом многочисленных философских исследований. Математика, однако, не нуждается ни в каком предварительном теоретико-познавательном исследовании более глубокой сущности понятия числа»[25].

Правда, это замечание Куранта, по смыслу того, что будет сказано дальше, можно отнести только к понятию натурального числа в его исходном варианте божественного творения. Все остальные числа математики создали сами.

Сказанное выше вполне соответствует замечанию Клини, что определение равенства (тождества) «не произвольно, оно задаётся сразу, как только определяются объекты» универсума[26]. Однако требуется ещё уточнить, какой именно предикат равенства имеют в виду, говоря, что понятие области интерпретации «уже предполагает неко-

---

22 См. в этой связи параграф 4.4 первой части «Логики абстракций».

23 *Зигварт Х.* Логика. Т. 1. СПБ, 1908. С. 98.

24 *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. С. 209.

25 *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1967. С. 21.

26 *Клини С.К.* Математическая логика. М., 1973. С. 193.

торый предикат равенства на ней». Если мы явно отделим исходно порождаемый универсум натуральных чисел (онтологический универсум) от того, который мы получаем порождающим процессом формальной арифметики (формальной арифметической системы с её обычной сигнатурой), то нам следует говорить ***о двух различных понятиях*** тождества. Только применительно к объектам натурального ряда в форме их порождения посредством функции «следующий за» предикат тождества имеет тривиальный диагональный смысл, то есть исчерпывается традиционной формулой закона (абсолютного) тождества $a = a$. Иначе говоря, семиотический смысл предиката «=» в этом случае исчерпывается фактом самотождественности. Естественно считать этот предикат тривиальным. Это своего рода ***внутреннее тождество*** (индивидуация) натуральных сущностей, индуцированное их исходным порождением.

Предикат тождества (равенства), который необходим для формулировки теорем (и прочих суждений) арифметики, имеет, конечно, иной смысл. Если воспользоваться терминологией У.В.Куайна, то можно сказать, что этот предикат принадлежит ***идеологии***, а не ***онтологии***. Последнее различение родственно тому, которое я провожу между онтологическим универсумом и гносеологическим. Суть его в том, чтобы явно отличать сущности действительного мира, который ни в одном из возможных смыслов не является теоретическим, а, следовательно, и возможным миром, «от тех сущностей, которые мы обязаны допустить, поскольку они неотделимы от нашего способа понятийного освоения мира и являются частью нашей концептуальной системы»[27].

Если говорить об арифметике, то потребность в таком, более глубоком, понимании тождества как средства концептуального освоения мира (предиката тождества в его нетривиальной форме) возникает с того момента, когда мы переходим к ***различным способам описания одного и того же*** натурального числа, то есть когда универсум строится уже не только из чисел, созданных Богом, а из термов языка формальной арифметики. А это происходит, например, одновременно с введением на онтологическом универсуме (множестве) натуральных чисел основных арифметических операций. Таким путём мы устраиваем «бал-маскарад» на области чисел: мы преобразуем последовательность натуральных чисел, в которой ни одно

---

[27] *Хинтикка Я.* Логико-эпистемологические исследования. М., 1980. С. 80.

число не встречается дважды, в открытую совокупность, в которой каждое натуральное число имеет (потенциально) произвольное количество образов.

Хочу повторить, что мы нуждаемся в ином понимании тождества (равенства) чем то, которое предлагает нам традиционный принцип, когда речь заходит о свойствах ряда натуральных чисел, иных чем порядковые. К примеру, такое понимание, по-видимому, необходимо уже с того момента, когда в числе аксиом появляется аксиома полной индукции или когда в формальном языке арифметики определяют операции над натуральными числами по рекурсии. В этом случае мы должны, с одной стороны, учесть фактические различия в способах представления (выразимости) одного и того же числа, а с другой, сохранить исходный универсум натуральных чисел в его первозданном виде. И эта задача ставится всякий раз, когда вводятся новые функции или предикаты. Допуская подстановочность на основе совпадения свойств, мы нуждаемся в гипотезе о существовании равных в универсуме, расширенном за счёт свойств и операций, составляющих сигнатуру теории. Поэтому не случайно рядом с записью «$x = x$» появляется запись « $x = y$», необходимая для представления ***тождества через абстракцию***. Правда, это последнее изображение предиката тождества не заменяет первое, поскольку, как уже говорилось, нельзя задать область интерпретации для формулы «$x = y$», не предположив заранее самотождественности (индивидуации) её элементов.

В свете априорного статуса индивидуации не кажется удивительным и тот факт, что именно формула индивидуации используется для доказательства утверждения, соответствующего вышеназванной гипотезе.

В самом деле, пусть $A(y)$ обозначает формулу $x = y$. Тогда $A(x)$ обозначает формулу $x = x$, полученную подстановкой x на место y в $A(y)$, а формула $A(x) \supset \exists y\, A(y)$ представляет формулу $x = x \supset \exists y\, (x = y)$. Из последней формулы и аксиомы $x = x$ по правилу отделения получаем $\exists y\, (x = y)$. И, обобщая по переменной x, получаем названную гипотезу $\forall x \exists y\, (x = y)$.

Конечно, расширение возможностей для тождества пока что при этом минимальное. Принято считать, что полученная формула говорит скорее о непустоте универсума, чем о тождестве через абстракцию, поскольку в предельном случае она верифицируется всё той же индивидуацией. Но я предпочитаю её толковать именно как гипотезу о существовании тождественных через абстракцию, то есть в более широком смысле, чем простая самотожественность (esse idem sibi ipsi).

Поясню коротко эту мысль.

Начну с того, что истинность суждения $\forall x\ (x = x)$ в традиционных учебниках по логике нередко связывали с актом отождествления, то есть истолковывали закон тождества как необходимый (принудительный) акт мышления по отождествлению какой-либо сущности (обычно мысли, понятия, суждения) с нею же самой[28]. Иными словами, чтобы утверждать, что $a = a$, надо уметь отождествлять[29]. Если приписывать такому толкованию универсальный смысл, отказывая тем самым традиционному закону в онтологическом аспекте как форме выражения индивидуации, то я не могу такое толкование принять.

В онтологическом аспекте речь идёт о ***самотождественности*** как внутренней характеристике объекта самого по себе, а в аспекте гносеологическом — об ***узнавании***. Ещё Платон заметил, что узнавание, как и память, основывается на нашей способности отождествлять и различать. Узнавание есть частный случай отождествления. Конечно, это не означает, что мы всегда знаем, как такие отождествления производить, хотя и умеем это делать.

Поскольку узнавание зависит не только от способности различать, но и от способности отождествлять (и в этом смысле оно связано также с абстракцией неразличимости), акт узнавания требует иной логической формы, чем форма индивидуации. Формулу $x = x$ необходимо заменить формулой $x = y$. В то время как первая формула представляет собой чистую тавтологию, вторая способна выражать нетривиальный (гносеологический) акт отождествления, представлять тождество в силу абстракции отождествления. Учитывая это обстоятельство, мы с известным основанием можем сказать, что ***тождество — это отношение, лингвистически представимое элементарным предикатом $x = y$, которое возникает между объектами нашей мысли, взятыми в качестве значений переменных x и y, если к этим объектам применить абстракцию отождествления.***

---

[28] См. например: *Введенский А.И.* Логика как часть теории познания. Пг., 1917.

[29] *Жаков К.Ф.* Логика. СПб., 1912. С. 14.

Однако, рассматривая эту тему гносеологически, мы должны позаботиться не просто об актах отождествлений и различений, которые в онтологическом контексте получались сами собой, подкреплённые интуицией узнавания. В гносеологическом контексте мы должны поставить вопрос о теоретическом понимании этих актов. А это невозможно, если мы не определим для себя (и в рамках нашей теории!), что же мы хотим сказать, произнося слово «тождество». Именно тут мы, во-первых, почувствуем необходимость вернуться к первоначальной ситуации и поговорить об условиях, на которых мы согласны какие-либо объекты реальности, нашего языка или нашей мысли считать тождественными, а, во-вторых, ощутим разницу между принятым актом отождествления («истиной факта») и тем, что оправдывает этот акт — общим и априорным понятием тождества («истиной разума»). Иначе говоря, абстракцию отождествления мы должны соотнести с априорным понятием тождества.

2.3. Принцип тождества. Уточнение третье

Вопрос о реальном содержании гипотезы $\forall x \exists y\ (x = y)$, о её онтологическом статусе философией был поставлен давно. Если наши суждения служат для описания реалий, они невольно наводят на мысль о содержании этой гипотезы, чем бы ни была подсказана эта мысль.

В античной метафизике нетрудно найти примеры противоположных ответов на этот вопрос. Парменидовцы, смешивая тождество и покой, полагали, что область интерпретации для этой гипотезы существует и что это даже весь универсум. Для Платона, также считавшего, что движение и тождество исключают друг друга[30], областью этой интерпретации служило уже «царство идей». Естественно, что в этом случае понятие о тождественном (тождество само по себе) оказывалось вне рамок эмпирических реалий. Чтобы придать ему объективное содержание, необходимо было постулировать онтологический статус универсалий, как это и сделал Платон. Таким образом, тождество является одной из платоновских универсалий.

«К учению об эйдосах, — говорит Аристотель, — пришли те, кто был убеждён в истинности взглядов Гераклита, согласно которым всё чувственно воспринимаемое постоянно течёт; так что если есть зна-

[30] См.: *Платон*. Соч. Т. 2. М., 1970. С. 369.

ние и разумение чего-то, то помимо чувственно воспринимаемого должны существовать другие сущности (physeis), постоянно пребывающие, ибо о текучем знания не бывает»[31].

Из этой цитаты видно, что гераклитовцы вообще отрицали существование какой-либо области интерпретации для предиката тождества, поскольку трансцендентной реальности они не признавали. Таким образом, знаменитый диалектический метод возник как разновидность агностицизма, «ибо о текучем знания не бывает».

Повидимому, существовали и иные, промежуточные, школы античности, которые стремились примерить обе крайности в неонтологической концепции тождества, в учении об «идеализациях», сохранившемся и до наших дней. Но эти школы менее известны.

Платон не обсуждал проблему существования тождества. Он считал это бесспорным. Хотя тождество как понятие нельзя абстрагировать из мира чувственного опыта, оно необходимо для понимания опытных фактов: «мы непременно должны знать равное само по себе ещё до того, как впервые увидим равные предметы»[32]. Таким образом, тождество, по Платону, должно существовать ***само по себе*** как идея (теперь бы мы сказали — как понятие), чтобы наши представления о тождестве вещей могли оказаться проекциями этой идеи. Именно эти проекции и лежат в основе всех наших суждений о тождестве, когда мы сравниваем вещи и судим о вещах: «если знание существует без абстрагирования от вещи, то, конечно, это — то самое знание, о котором платоники говорят, что не оно от вещей, но вещи сообразно ему»[33].

Аристотель отказался от платоновской картины мира. Соответственно, он вернул проблему тождества в мир посюсторонних реалий: «тождество есть некоторого рода единство бытия либо вещей числом более чем одна, либо одной, когда её рассматривают как нечто большее, чем одна (например, когда о ней говорят, что она тождественна самой себе, ибо в этом случае её рассматривают как две)»[34].

---

[31] *Аристотель.* Метафизика, 1078b15 // *Аристотель.* Соч. Т. 1. М., 1976. С. 327.
[32] *Платон.* Соч. Т. 2. С. 36.
[33] *Кузанский Николай.* Соч. Т. 1. М., 1979. С. 125.
[34] *Аристотель.* Метафизика, 1018a9 // *Аристотель.* Соч. Т. 1. М., 1976. С. 158.

Мы видим, что формула $a = a$, будь она написана тогда, была бы понятна Аристотелю. Но он, как и Платон, идёт дальше самотождественности. Выражение «единство бытия» вещей «числом более чем одна» предполагает некоторый акт отождествления и, соответственно, элементарный предикат «$x = y$». Остаётся только уточнить критерий для актов отождествлений, для того, чтобы отождествлённые объекты мы обоснованно могли считать тождественными. И Аристотель такой критерий указывает: если объекты тождественны, то «что сказывается об одном, должно сказываться и о другом, а о чём сказывается одно, о том должно сказывается и другое»[35].

Желающий может сравнить этот аристотелевский критерий либо с критерием Лейбница, на который обычно указывают, как на первое корректное определение тождества, либо с современным его определением в форме аксиомы подстановочности[36].

Здесь я хочу чуть задержаться, чтобы опять посетовать на то, что в изложении логических взглядов Аристотеля историк Ахманов не обнаружил следов аристотелевского учения о законе тождества. Но, как видно из цитированных выше замечаний, у Аристотеля мы находим более чем пресловутый школьный закон мышления. Однако проблема не так проста, чтобы её исчерпывающее разрешение состоялось уже в античности.

Присмотревшись поближе к тропам Аристотеля о тождестве, мы не можем не заметить, что у него соседствуют (но не смешиваются) два толкования тождественных — тождественные как ***одно по числу*** (и если этого нет, то тождественность не доказана) и тождественные ***по роду*** или ***по виду***, что не предполгает единственности по числу, но тоже требует доказательства. Другими словами, «о тождественном говорится в различных значениях» (нумерическом и признаковом), и только первое значение тождества безоговорочно подчиняется принципу подстановочности, тогда как другое допускает возможность признаков, разделяющих вещи: если «одно опровергается, а другое нет, то они не одно и то же»[37].

Мы сказали бы теперь, что Аристотель подходит к различению двух понятий — тождества в его строгом смысле с правилом неограниченной подстановочности и тождества в широком смысле как эквивалентности с условием ограниченной замены.

---

[35] *Аристотель.* Топика, кн.7, гл.1. 152b25 // *Аристотель.* Соч. Т. 2. М., 1978. С. 497.
[36] *Яновская С.А.* Равенство (в логике и математике) // Философская энциклопедия. Т. 4. М., 1967. С. 445-446.
[37] *Аристотель.* Там же. С. 497.

С этого именно пункта и начинается тяжба Лейбница и Кларка о принципе тождества неразличимых. Об этом принципе писалось и говорилось много. Даже ставился под сомнение сам факт открытия этого принципа Лейбницем[38]. Странно, однако, что западные аналитики, явно связывая этот принцип с известным определением предиката тождества в логике второго порядка[39], не потрудились связать его с другим принципом, которым не менее дорожил Лейбниц, — с принципом индивидуации.

Между тем, Лейбниц сам указывает на эту связь: «Если две неразличимые вещи существовали бы, то их, конечно, было бы две, однако такое предположение ошибочно и противоречит великому принципу основания. Обычная школьная философия ошибалась, предполагая, что имеются вещи, различающиеся solo numero, или только потому, что их две, и именно из этого заблуждения вытекала её беспомощность по отношению к так называемому принципу индивидуации»[40].

Нетрудно заметить, что принцип индивидуации выражает суть лейбницевской монадологии. Кларк, не разделяя этой лейбницевской философии, рассматривает тождество как «внешнее отношение». Поэтому для него две вещи могут быть совершенно тождественны, не переставая быть двумя вещами. Похоже, что такую ситуацию мы имеем сегодня в квантовой области для квантовой системы тождественных частиц. Однако нумерическая индивидуация здесь также невозможна. И это подрывает аргументы Кларка. А вот для Лейбница нумерация в пространство дискриминирующих свойств не входит, и тождество неразличимых нумерически различных не порождает. Это возвращает нас к приведённым выше словам Аристотеля о пресловутой формуле $a = a$, которые, мне кажется, очень удачно дополняются словами Николая Кузанского: «исчислять — значит переходить от одного к другому многократно, а трижды развернуть одно и то же — значит создать множественность без числа»[41]. Такой множественностью будет, например, «мир цифр» на универсуме чисел. Теперь подобную множественность иногда называют мультимножеством.

---

[38] *Curley E.M.* Did Leibniz state «Leibniz Law» // Philosophical Review. Ithaca-N.-Y. V. 80. N.4, 1971.

[39] См.: *Клини С.К.* Математическая логика. М., 1973. С. 195; *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. М., 1947. С. 163.

[40] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. М., 1982. С. 472.

[41] *Кузанский Н.* Соч. Т. 2. М., 1980. С. 72.

Таким образом, несмотря на туманность его терминологии, можно предположить, что для Лейбница тождественность создаёт некое «внутреннее отношение» (свойство) монады или индивида, которым один индивид отделён от другого. Универсум монад, подчинённый принципу тождества неразличимых, образует своего рода хаусдорфово пространство, в котором тождество относится только к внутренней топологии объекта и не касается топологии его положения. Повторяя мысль, уже сказанную выше, замечу, что тождество по Лейбницу даётся вместе с универсумом (рассуждения), а всё остальное, что возникает как следствие абстракции отождествления, зависит от той роли, которую те или иные объекты играют в теории, описывающей положение дел в данном универсуме.

Переписка Лейбница и Кларка не решила проблемы тождества. Но она знаменательна подходами к её решению. В их полемике рождался тот подход к истолкованию тождества, который позднее использовали создатели математической логики. Этот подход заключён в следующих словах, которые Кларк вкладывает в уста Лейбница: «Полагать две вещи неразличимыми — означает полагать одну и ту же вещь под двумя именами»[42].

Кажется, эта позиция переносить проблему тождества неразличимых в лингвистический план, твёрдо укоренилась и сохраняется и поныне, о чём красноречиво говорят слова Куайна: «утверждения тождества, являющиеся истинными и небессмысленными, состоят из неодинаковых единичных термов, которые соотносятся с одним и тем же объектом»[43].

Я неоднократно высказывался против такого толкования лейбницевского принципа тождества неразличимых.

2.4. Абстракции отождествления и проблема тождества

Сделанные выше уточнения представляются мне просто необходимыми при обсуждении проблемы тождества. Но в контексте этих уточнений столь же необходимо вернуться к абстракции отождествления, о которой подробно говорилось в пятой главе первой части одноимённой книги.

---

[42] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. М., 1984. С. 450.

[43] *Куайн У.В.О.* Слово и объект // Новое в зарубежной лингвистике. М., 1986. С. 89; или его же: Слово и объект. М., 2000. § 24.

Дело в том, что в отечественной методологии давно укоренилась мысль, что тождественность объектов не является данной заранее, а обусловлена как раз абстракцией отождествления, так что отношение тождества мыслится по существу как функция этой абстракции. Заведомо нам даются лишь предпосылки для применения абстракции отождествления в виде наличного сходства, подобия или одинаковости, которым «в некоторой степени свойственно тождественное»[44]. И дело субъективного выбора, когда применять абстракцию отождествления «по отношению к весьма разнообразным «одинаковостям» весьма разнообразных объектов»[45].

Не стоит и доказывать, что абстракция отождествления — дело рук человеческих. И сам автор термина, и его ученики и последователи об этом обстоятельно и подробно сказали.

Во всяком случае необходимо иметь в виду, что абстракция отождествления — это действие, порождающее тождественность, а не констатирующее её. Онтологически пара «тождество – различие» не связана с условиями наблюдения и не предполагает какого-либо действия, то есть она не требует какой-либо формы залога. Отглагольное прилагательное «отождествлённое», напротив, указывает на предшествующее действие, хотя залоговая форма здесь и не фиксирована: «отождествлённое что-то» (страдательный залог) и «отождествлённое кем-то» (действительный залог). В первом случае мысль направлена на объект действия, во втором — на субъект действия.

Делая акцент на слове «отождествление», нередко упускают из виду такую методологически значимую функцию абстракции отождествления, как «формирование общих абстрактных понятий»[46]. А в этом своём качестве абстракция отождествления ничем не отличается от давно известной в философии ***обобщающей абстракции***[47]. Разница лишь в том, что абстракция отождествления явно указывает на особенности свойств тождества, которые сопутствуют отождествлению. Это рефлексивность, транзитивность и симметрия.

---

[44] *Платон.* Соч. Т. 2. М., 1970. С. 424.

[45] *Марков А.А.* Элементы математической логики. М., 1984. С. 9.

[46] См.: *Нагорный Н.М.* Абстракция отождествления // Новая философская энциклопедия. М., 2000. Т.1; *Он же.* Абстракция отождествления // Математическая энциклопедия. М., 1977. Т. 1.

[47] *Бирюков Б.В.* Обобщающая абстракция // Философская энциклопедия. М., 1967. Т. 4; *Горский Д.П.* Вопросы абстракции и образование понятий. М., 1961. С. 24.

Можно, однако, спорить, не совпадают ли эти две абстракции по существу. И тогда возникает вопрос, почему же, обсуждая тему тождества, и Лейбниц, и Фреге, и другие западные методологи, неизменно игнорировали и игнорируют обобщающую абстракцию как средство, уточняющее наше представление о тождестве?

Ответ, очевидно, в том, что ни абстракция отождествления, ни обобщающая абстракция, не дают однозначной характеристики понятию «тождество», оставляя многое на наш субъективный произвол. Достаточно сказать, что сопутствующие им отмеченные выше три аксиомы недостаточны, чтобы выделить тождество из всех прочих отношений типа равенства. В самом деле, при формировании общих абстрактных понятий (абстрактных объектов), имея полную свободу в выборе свойств, которые нам кажутся существенными и игнорировании несущественных свойств, мы способны порождать столько суждений о тождестве, сколько позволяют комбинаторные возможности выбора.

Иными словами, абстракция отождествления позволяет нам решить вопрос о тождественности определённых объектов ***для данного случая при данных условиях*** отвлечения. Между тем, желательно иметь ***общий критерий*** тождественности, «даже если не всегда в наших силах установить, применим ли этот критерий»[48]. Это, видимо, имел в виду и Лейбниц, отличая понятие «быть тождественным» от понятий «быть равным», «быть подобным» или «быть конгруэнтным»[49].

И стоит напомнить, что для абстракции отождествления в её конструктивном понимании характерна как раз последняя группа понятий. Так, вводят понятия графического равенства или графического подобия и говорят, что под абстрактным объектом (общим понятием) подразумевается понятие, возникающее в результате отвлечения от различий между графически равными объектами и что в применении к конкретным объектам именно такого рода отвлечение «составляет содержание *абстракции отождествления*»[50]. При этом исходное разнообразие сохраняется, поскольку «изучаются и принимаются во внимание» ***не все*** свойства объектов. Следовательно, нет оснований говорить об «одном и том же» (idem numero), а можно говорить только о «таких же» (idem species).

---

48 *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000. С. 87.

49 См.: *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 3. М., 1984. С. 125.

50 *Шанин Н.А.* О некоторых логических проблемах арифметики // Труды математ. ин-та им. В.А.Стеклова. Т. XLIII. М., 1955. С. 15.

Как производится само отвлечение в случае абстракции отождествления, точно не указывается. Однако предполагается, что транзитивность равных должна сохраняться, для чего распознавание образов должно быть однозначным. Но если основанное на отвлечении распознавание равных не является, вообще говоря, проблемой для человека, то для машины, как известно, это проблема. А в случае реальной практики распознаваний не только для машины, но и для человека место абстракции отождествления заступает абстракция неразличимости, при которой разрешается считать, что «два достаточно близких состояния практически тождественны»[51]. Следовательно, при этом сохраняются все условия для неоднозначности и для появления парадоксов неразличимости.

Об этом подробно говорилось в первой части этой книги, и здесь нет необходимости это повторять.

О понятии равенства в смысле обобщающей абстракции (или абстракции отождествления) математикам было известно давно. Это, по определению Клини, равенство как эквивалентность. Правда, и сейчас ещё можно встретить смешение двух понятий — тождества и эквивалентности. Но Фреге их различие, конечно, понимал, когда анализировал определения через абстракцию. При этом все его усилия были направлены на то, чтобы так осмыслить содержание понятия «тождество», чтобы это понятие было однозначно «определено не только для данного случая». А последнее возможно лишь при условии, что тождество получит статус априорного понятия, которое уже во всех случаях сможет служить общим критерием для любых суждений о тождественности любых объектов[52].

Нетрудно заметить, что это в точности та же мысль, которую когда-то высказал Платон. Но Платон не развил эту мысль в логическом контексте. Фреге, напротив, связывает априорный статус понятия тождества с законами тождества, задавая естественный вопрос: «Каковы же эти законы?». Он воспринимает их как аналитические истины, которые должны «развиваться из самого понятия». И чтобы эксплицировать эти законы Фреге обращается к известному определению Лейбница: «Eadem sunt unum potest substiti alteri salva veritate». Подстановочность — вот общий критерий подлинной тождественности. В подстановочности, отмечает Фреге, заключены вообще все законы тождества.

---

[51] *Лебег А.* Об измерении величин. М., 1960. С. 43.

[52] См.: *Фреге Г.* Основоположения арифметики... С. 88.

Стоит, однако, заметить, что в эпоху создания «Основоположений» Фреге находится ещё под влиянием философии Канта. Определения через абстракцию он отклоняет в силу их «творческого характера». Они порождают абстрактные объекты, недоступные наглядному созерцанию. Последнее ещё простительно для арифметики, но непростительно для геометрии.

И всё же путь к платонизму проложен не без участия проблемы тождества. В то время, когда Фреге ищет решение этой проблемы, в философской логике безраздельно господствует психологизм. Соответственно, и понятие о тождестве получает психологическое толкование, точнее, множество толкований по вкусам и склонностям авторов. Много позднее Х.Зигварт заметит: «слово тождество ... стало очень многосмысленным, и, так называемый, закон тождества применяется в весьма различном смысле»[53].

Преобладающий смысл толкований этого закона уводит нас от тождества к сходству: «всякое толкование закона тождества, не отличающее его от сходства, должно быть отвергнуто»[54]. Таким образом, вместо пары понятий «тождество — различие» обсуждается только пара «различие — сходство» как основные слагаемые восприятия, которые по сути своей относительны. Так что если допускалось говорить о тождестве, то только как о понятии относительном, по существу совпадающим с понятием сходства. Об абсолютном его характере, об априоризме и аналитической истинности (которые связывал с тождеством Фреге) не было и речи. О Лейбнице и его законе тождества неразличимых также не вспоминал тогда никто.

Идея обобщающей абстракции (В.Вундт) сформировалась на почве психологизма. Стоит ли удивляться, что та же печать лежит и на абстракции отождествления? Не случайно А.А.Марков говорит о ней как о вспомогательной абстракции: «Применяя в дальнейшем абстракцию отождествления, мы будем рассматривать её только как удобный способ выражения, сокращающий формулировки. По этим сокращённым формулировкам всегда без труда могут быть восстановлены более длинные формулировки, обходящиеся без абстракции отождествления»[55]. А несколько ранее, в работе, рассчитанной на зарубежного читателя, Андрей Андреевич вовсе не упоминает эту абстракцию, заменяя её приёмом, который он называет ***интуицией общности***[56].

---

[53] *Зигварт Х.* Логика. Т. 1. СПб., 1908. С. 94.

[54] *Минто В.* Дедуктивная и индуктивная логика. М., 1909. С. 41.

[55] *Марков А.А.* О логике конструктивной математики. М., 1972. С. 9-10.

[56] *Markov A.A.* Essai de construction d'une logique de la mathématique constructive // Revue internationale de Philosophie. 25 Année. № 98. Fasc. 4. 1971.

2.5. Интервал абстракции и логика тождества

Концепция тождества, к которой в конечном счёте пришёл Фреге, была продиктована нуждами его Begriffsschrift — знаковой системой, претендующий на роль логического языка для всей математики. Поэтому и тождество у него является всецело семиотическим отношением.

Новизна его работы, однако, не в этом. Прежде всего она в реанимации (1884) лейбницевского принципа тождества неразличимых. Другой важнейшей заслугой Фреге было разделение референции (смысла) и значения.

Хотя в истолковании Фреге лейбницевский принцип приобрёл всецело логистический вид, это не противоречило идеалам классической науки, поскольку вопрос о теориях, учитывающих особенности эмпирической неразличимости, тогда не ставился вовсе. Но в общем плане это был недостаток концепции, поскольку тождество и неразличимость не живут обособленно, а диалектика их единства составляет, по выражению Лейбница, один из великих принципов метафизики.

Замечательно, что названные два достоинства концепции Фреге породили и два её недостатка.

Если в «Основоположениях» (1884) Фреге ратует за такое определение тождества, которое годилось бы не только для данного случая, а было бы общим, то в работе «О смысле и значении» (1892) он определяет тождество как онтологический предикат, когда речь идёт о вещах (тогда это «$x = x$»), и как логический, а точнее лингвистический, когда речь идёт о знаках или именах (описаниях) вещей (тогда это «$x = y$»). В первом случае тождество тавтологично, во втором нет. В этом его решении сказалась лингвистическая ориентация Фреге. В итоге в его концепции понятие тождества и законы тождества потеряли статус априорных и аналитических истин. Это явный отход не только от идей Платона, но и от идей Лейбница, и даже от идей логицизма. Я думаю, причиной тому — открытые им к этому времени неэкстенсиональные, или косвенные, контексты.

Действительно, лейбницевский принцип требует неограниченной взаимозаменяемости равных применительно и к вещам, и к языкам, и контекстам. А это не является абсолютным лингвистическим свойством (как обнаружил сам Фреге), а предполагает определённые условия, налагаемые на отношения типа равенства. Лишь тогда, когда равенство объектов является внутренней характеристикой языка, независимой от внеязыковых фактов, замена равных не имеет ограничений. Таковы, в частности, графическое равенство или синтаксическая синонимия, по отношению к которым каждый язык экстенсионален. Если же понятие о равном вводится с учётом подразумеваемой модели как референциальная эквивалентность, свойство экстенсиональности сохраняется не всегда. Ограничения на правило замены равных в этом случае возникает от того, что референция, являясь функцией смысла, может измениться в результате замены равных по предметному значению, но не равных по смысловому. Иначе говоря, лейбницевский принцип применим только там, где смысл не управляет референцией. Следовательно, этот принцип не является универсальным. Несомненно, это было важным открытием Фреге, заставившем его изменить отношение к принципу Лейбница. Но универсального принципа, равно пригодного для экстенсиональных и интенсиональных контекстов Фреге не предложил.

С другой стороны, лингвистическая ориентация на решение проблемы тождества лишила концепцию Фреге полноценного онтологического содержания. В самом деле, когда Локк говорил о неразличимо сходных, когда Лейбниц и Кларк полемизировали в свой переписке о тождестве неразличимых, они имели в виду не (возможно случайные) совпадения в значениях слов и знаков (в силу отношения именования), а необходимые основания для суждений о тождестве применительно к объектам всей объективной реальности. В онтологической проблеме видели они подлинный casus delicti. И современная физика дала наглядный пример тому, что семиотическим аспектом нельзя ограничиться при решении проблемы тождества en bloc.

Между тем, Фреге ограничивается именно этим аспектом. Онтология тождества для него тривиальна: когда говорят о тождестве вне знаковой функции слов, надо подразумевать отношение, возможное только между вещью и ею же самой. С точки зрения Фреге в таком отношении, выражаемом предикатом «$x = x$», нет никакой познавательной ценности.

О познавательной (гносеологической) ценности самотождественности (индивидуации) «$x = x$» достаточно говорилось выше. Обратимся теперь к предикату «$x = y$».

В этом случае справедливость сказанного Фреге очень и очень зависит от того, что мы называем вещами. К примеру, если это числа натурального ряда, построенные с помощью операции «следующий за», и при этом никаких других представлений натуральных чисел не имеется, то Фреге прав. В этом случае «мы оказались бы не в состоянии провести различие между $a = b$ и $a = a$, когда $a = b$ истинно»[57].

Но если мы будем считать вещами любые правильно построенные записи натуральных чисел в алфавите формальной арифметики, рассматривая их при этом без семантики как объекты исчисления, а не формальной системы (как это я уже отмечал выше), то Фреге не прав. Всё дело в том, что формула $x = x$ всегда представляет тождество (точнее, самотождественность), а формула $x = y$ только способна представлять его «при условии...».

К примеру, в исчислении нормальных алгорифмов вещами являются словосочетания, за которыми, в сущности, нет семантики. Правда, могут сказать, что и тождество здесь тривиальное — графическое равенство словосочетаний. Однако изучаются здесь не любые свойства словосочетаний, а графическое равенство присутствует здесь как неопределяемое понятие. Определяемым (исходным) является отношение одинаковости (графического подобия), которое отнюдь не является тривиальным, иначе нам не нужны были бы оговорки принципиального характера, касающиеся абстракций. Например, такой оговоркой является условие на узнавание графического равенства путём сравнения конкретных экземпляров с их абстрактным представителем или с эталоном. Понятно, что графическое равенство здесь — это именно отношение между вещами, а не между именами одной и той же вещи.

Подобные оговорки означают не что иное, как соглашение об интервалах допустимых абстракций, которые собираются использовать в рамках данного исчисления, языка или теории. Например, указывается, при каких значениях переменных, свободно входящих в ту или иную формулу, эта формула истинна. Мы можем считать формулу вида $x = y$ истинной, когда на место x подставлено 4, а на место y — 2+2. Однако мы можем так считать вовсе не потому, что 4 и 2+2 это имена одного и того же числа, а потому, что в нашем исчислении мы можем доказать, что 4 = 2+2. При этом понятие истинной формулы по существу совпадает с понятием общезначимости.

В этом случае на все доказуемые выражения вида $x = y$ надо смотреть как на ***суждения о тождестве***, которые можно разложить на логический предикат тождества (***понятие тождества***) и на объекты,

---

[57] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 230.

удовлетворяющие этому предикату в силу абстракций теории (исчисления), требующих (позволяющих) считать эти объекты «одним и тем же» объектом.

Если иметь в виду предыдущий пример, то полезно помнить, что абстракции арифметики применимы не всюду. Суждение 4 = 2+2 истинно в классе всех «чистых» арифметических ситуаций, но в классе ситуаций, где имеет место сложение неаддитивных величин, это суждение, вообще говоря, ложно.

Введение интервальных представлений в осмысление проблемы тождества позволяет избежать явных противоречий в использовании ***понятия тождества*** для выражения ***суждений о тождестве***, преобразуя эти противоречия в диалектику ситуаций «внутри» и «снаружи», в которых абсолютное тождество, о котором говорил Платон, является совершенно законным наряду с относительностью всякого рода отождествлений.

Но обратимся ещё раз к концепции Фреге.

В статье «О смысле и значении» (1892), начиная с первой фразы о понятии тождества, Фреге затем переходит к проблеме суждений о тождестве и больше к теме понятия уже не возвращается. Между тем, не одно и то же, идёт ли речь о понятии или о суждениях тождества. Чтобы построить или оценить суждение тождества, необходимо прежде иметь понятие о тождестве, на что впервые указал Платон[58], и выше я особо это подчёркивал.

К сожалению, эта платоновская мысль не всегда берётся в расчёт. Когда Витгенштейн с запальчивостью заявляет, что «сказать о двух предметах, что они тождественны, бессмысленно, а сказать об одном предмете, что он тождествен самому себе, значит ничего не сказать» и далее, что «знак тождества не является существенной составной частью логической символики»[59], он отдаёт приоритет суждению, не разъясняя понятия. Отсюда же и его заключение, что тождество не является отношением между объектами.

В своё время Рассел как будто уловил суть этой позиции Витгенштейна: суждения тождества не зависят от понятия тождества. В символике Витгенштейна их можно выразить, не прибегая к понятию, которое предполагается неопределимым. И примечатель-

---

58 *Платон.* Соч. Т. 2. М., 1970. С. 36.

59 *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. М., 1958. С. 76 (5.5303 и 5.533).

но, что Рассела увлекла аргументация Витгенштейна, от которой, как он полагал тогда (1922 г.), нет спасения. К счастью, это увлечение было недолгим.

Любопытно, что Куайн также усматривает в афоризме Витгенштейна «ошибку против понятия тождества» и говорит, между прочим, что эту ошибку можно исправить, если суждение тождества понимать в смысле Фреге.

Однако в 1892 г. сам Фреге, говоря о суждениях, замалчивает вопрос о понятии. Фреге (как позже Витгенштейн) стремится уйти от тривиальности тождества. И для этого он привлекает категорию смысла. Оттого в его изложении идея тождества, реализуясь в суждениях, становится синтетической, тогда как прежде, в «Основоположениях» (1884), она претендовала на априорность и аналитичность. И опять мы видим, что, когда мы уходим от понятия тождества в область суждений, лейбницевский принцип тождества неразличимых теряет статус логически необходимого принципа.

Разумеется, подход оправдывается целью исследования. В частности, моя цель — понятие тождества, а не суждения тождества.

2.6. Относительный образ тождества. Концепция Гича

Относительный характер всякого рода отождествлений вряд ли оспорим. И в этом смысле концепция конструктивной логики никогда на абсолютный характер тождества не претендовала. Другое дело — классический вариант, восходящий к Фреге и Расселу[60]. Поэтому в обсуждаемой статье Петера Гича подразумевается только этот вариант. Что же касается общей постановки вопроса о том, относительно или абсолютно тождество, то в сообществе нефилософствующих логиков этот вопрос фактически не обсуждался. Было известно, что одна и та же теория не может иметь двух (естественно разных) отношений тождества по определению самих отношений. И абсолютный характер тождества вытекал из его единственности. Напротив, философы нередко склонялись к мысли, что «всякое абсолютное отношение тождества оказывается при ближайшем рассмотрении основанным на определённых условиях»[61].

[60] *Geach P.T.* Identity // The Review of Metaphysics, Haverford. 1967, V. XXI, N.1.

[61] *Геффдинг Г.* Философские проблемы. М., 1904. С. 61.

Но было ещё некое интуитивное убеждение в невозможности релятивизировать тождество, на которое, в частности, ссылается Гич, приводя слова Фреге: «Тождество является отношением, данным нам в такой специфической форме, что непостижимо, как могли бы существовать различные его формы»[62].

Отправляясь от этого заявления Фреге, Гич делает своё: «Я защищаю тезис, что тождество относительно. Когда говорят, что «*x* и *y* тождественны», я полагаю, что это неполное выражение, сокращение для выражения «*x* тот же самый *A*, что и *y*», где «*A*» — это некоторое счётно выразимое имя (count noun), понятное из контекста высказывания»[63].

Суть относительности Гич поясняет так. Концепция абсолютного тождества игнорирует тот простой факт, что отношение тождества вводится всякий раз для данной теории и определяется относительно предикатов этой теории (относительно идеологии этой теории). Вполне возможно, что при расширении данной теории (изменения идеологии) ситуация может измениться, поскольку появятся предикаты, различающие объекты, которые прежде были неразличимы.

Из этого обстоятельства, впрочем хорошо известного, Гич делает такой вывод: имея отношение, представляющее абсолютное тождество в рамках данной теории (полную неразличимость дескриптивными ресурсами данной теории), мы ещё не можем утверждать, что это отношение совпадает с тем тождеством, которое он называет реальным и которое, по его мнению, одно только может называться абсолютным, то есть независимым ни от какой идеологии, ни от каких конкретных предикатов той или иной теории. Для реального тождества чтт угодно истинное о чём-то тождественном с ***a*** должно быть истинно и о самом ***a***, и наоборот. Более того, реальное тождество должно быть тождеством, независимо от того, какие вообще предикаты есть в данной теории. Иными словами, представление об абсолютном тождестве с точки зрения Гича требует, чтобы любой способ описания в характеристике объектов универсума утратил свою роль, был, так сказать, посторонним для факта их объективности.

---

[62] *Frege G.* Grrundgesetze der Arithmetik. Bd. II. Olms. Hildesheim, 1962. S. 254.

[63] *Geach P.T.* Identity... P. 3. Ниже, излагая позицию Гича, я не буду приводить ссылки на соответствующие страницы.

А далее Гич замечает, что если мы это потребуем, то обязательно впадём в противоречие. Неограниченный язык «о чём угодно истинном об *a*», не отнесённый к определённой идеологии теории, рано или поздно приведёт нас к таким известным парадоксам, как парадокс Греллинга или парадокс Ришара.

Таким образом, нам необходимо пересмотреть традиционное наивное отношение к известной аксиоме подстановочности, входящей в определение понятия тождества, позволяющее говорить о чём угодно без всяких ограничений (Гич, со ссылкой на Куайна, использует аксиомную схему $Fa \leftrightarrow \exists x\,(Fx\ \&\ x = a)$)[64].

Замечу, что, заключая, Гич связывает высказанные им соображения об относительности тождества не с именем Лейбница, а с именем Локка, якобы предвосхитившего фундаментальный тезис его (Гича) статьи в своих «Опытах».

2.7. Реминисценция на тему относительности тождества

Моё знакомство с работой Гича относится к осени 1971 г., когда указанный том «The Review of Metaphysics» появился в Фундаментальной библиотеке АН[65]. Но до этого уже была опубликована моя статья на ту же тему и под тем же названием в Философской энциклопедии[66], написанная, кстати, двумя годами ранее. Если статья Гича вызвала оживлённую дискуссию во многих философских журналах США и Европы, то моя статья прошла, конечно, незамеченной. Единственным позитивным, хотя косвенным и кратким, откликом на неё стала сама по себе интересная публикация в журнале «Вопросы философии»[67] и ещё более краткая, но выразительная ссылка на мою статью как на «весьма поучительный анализ соотношения между онтологическим, эпистемологическим и лингвистическим аспектами понятия

---

[64] Эта схема слабее обычной гильбертовской (она выводима из неё), но Гич, ссылаясь на Куайна и Хао Вана, уверяет, что её достаточно для общей теории тождества, что, однако, сомнительно.

[65] Пользуюсь случаем и выражаю мою признательность сотруднику ИНИОН Борису Петровичу Гинзбургу, который познакомил меня с содержанием этой работы.

[66] *Новосёлов М.М* Тождество // Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970.

[67] *Виленкин Н.Я., Шрейдер Ю.А.* Понятия математики и объекты науки // Вопросы философии. 1974. № 2.

тождества», появившаяся в книжке, которая, к сожалению, почти тут же была запрещена (к цитированию), правда, при обстоятельствах иного рода[68].

Поскольку в моей статье (как и в работах тех, кто откликнулся на неё) поддерживался аргумент об относительности понятия тождества, знакомство с работой Гича не стало для меня откровением. Однако, она, безусловно, укрепила меня в правоте собственной концепции.

В чём же заключалась эта концепция? В чём сходство и в чём расхождение этой концепции с концепцией Гича?

Для ответа на эти вопросы я не могу придумать ничего лучшего, как обратиться к мой публикации 1970-го и прокомментировать её.

Начну с того, что, обсуждая тему относительности понятия тождества, я вместе с тем отмечал, что ***идея тождества*** и так или иначе определённое ***понятие тождества*** — это не одно и то же. Идея тождества предваряет любое определение понятия тождества — как-никак мы должны знать, что мы должны определить! При этом обычно необходимы какие-то вспомогательные отождествления, но отнюдь не посторонние для данного случая. Например, в приведённой выше аксиомной схеме, на которую ссылается Гич, по крайней мере, ***а*** должно быть отождествлено в обоих вхождениях.

Иными словами, я начинал статью с платоновского вопроса о тождестве «самом по себе. Признаём мы, что оно существует, или не признаём?»[69].

Мы видели выше, что если говорить о тождестве как понятии, то Гич отрицательно отвечает на этот платоновский вопрос: «просто нет такого понятия как безоговорочное тождество». Но если говорить об идеи тождества, то ей вообще нет места в концепции Гича. По существу не обсуждаются в ней и принцип тождества неразличимых и принцип индивидуации, которые в моей статье суть alpha et omega проблемы.

Между тем, я настаивал на целесообразности отделить идею тождества от понятия по основаниям, о которых мне ещё придётся говорить ниже. Более того, я использовал далеко не праздные понятия интервальной семантики, разделяя онтологическую индивидуацию (в некотором смысле «вещь в себе») и гносеологическую индивидуа-

---

68 *Гастев Ю.А.* Гомоморфизмы и модели. М., 1975.

69 *Plato*. Phaed. 74 b; // *Платон*. Соч. Т. 2. М., 1970.

цию (нечто достижимое «для нас»). Тогда это было замечено с сочувствием: «Согласно точке зрения М.М.Новосёлова, принцип индивидуации, понимаемый как гипотеза об онтологии, постулирует только абстрактную возможность индивидуации, но не гарантирует, что в опыте индивидуация всегда осуществима. Вопрос о том, как индивидуализируются элементы универсума в опыте — это гносеологический вопрос, ответ на который даётся всегда с точностью до условий неразличимости»[70].

Конечно, то, что тождество и индивидуация неразлучны это, наверное, понимал и Гич, апеллируя к замечанию Фреге о том, что сказать «*x* – один» — это неполный вариант высказывания «*x* – один *A*, единственный *A*»; иначе это высказывание не имеет прозрачного смысла, поскольку связь понятий *один* и тождества в немецком «ein und dasselbe» такова же, что и в английском «one and the same». Только Гич напрасно удивляется тому, что при таком истолковании единственности, Фреге не разделял доктрину относительного тождества.

Если указанная мысль Фреге относятся к тождеству в его нетривиальном смысле, то речь идёт не о тождеством вещей, поскольку тождество вещей для Фреге сводится к формуле ***a* = *a*.** А в лингвистике просто нет абсолютных понятий.

Если же эта мысль относится к теме индивидуации, то характер индивидуации здесь явно не определён с необходимой ясностью, и дело исследователей творчества Фреге разбираться в том, что он имел в виду под таинственным «*A*», тем более, что в семантике Фреге отсутствует сама идея индивидуации.

Нельзя сказать, что Гич обходит проблему отождествлений и различений. Напротив, на этом построена его опровергающая аргументация. Но для него и то и другое вовсе не абстракции, а неразличимость имеет вполне классический смысл, тогда как в моей статье представление о принципе тождества неразличимых даётся в расширенном смысле, когда неразличимость разрешается понимать эмпирически (как субъективный феномен) со всеми вытекающими отсюда последствиями для относительности этого принципа.

И ещё на одно понятие, отличающее мою концепцию от концепции Гича, следует обратить внимание. Это понятие об ***интервале абстракции отождествления***. В связке других понятий интервальной

---

[70] *Виленкин Н.Я., Шрейдер Ю.А.* Понятия математики... С. 124.

семантики оно позволяет избежать релятивизма там, где релятивизм кажется неизбежным. Разделяя ***интервальные ситуации*** «внутри» и «снаружи» оно позволяет, с одной стороны, сохранить классический способ толкования с его абсолютизацией понятия тождества, а с другой стороны, даёт место вполне современному (в духе неклассической науки) толкованию этого понятия как понятия относительного к средствам наблюдения.

На этом я и остановлюсь, хотя многое другое из содержания моей статьи ещё остаётся «за кадром».

2.8. Реминисценция на тему абсолютности тождества

Эту тему, как и предыдущую, я начну с небольшого сравнения. Я приведу два неформальных определения понятия тождества в двух публикациях, появившихся почти в одно время:

1. «**Тождество** (лат. Identitas), понятие, выражающее предельный случай *равенства* объектов, когда не только все родово-видовые, но и все индивидуальные их свойства совпадают»[71].
2. «**Тождество** — отношение между предметами (реальными или абстрактными) которое позволяет говорить о них как неотличимых друг от друга, в какой-то совокупности характеристик (напр., свойств)»[72].

Беглый взгляд на оба определения показывает, что в первом случае понятие тождества определяется как абсолютное (переменная может иметь только один предел), а во втором — как относительное. Более того, во втором случае характер неотличимости не оговаривается, а потому это может быть и эмпирическая неотличимость, то есть понятие в известном смысле размытое, а потому и не гарантирующее соблюдение условий для выполнения логических законов, в отсутствии которых любое понятие тождества, даже относительное, вообще говоря, лишено смысла.

---

[71] *Новосёлов М.М.* Тождество // Философский энциклопедический словарь. М., 1989; или первое издание 1983-го.

[72] Краткий словарь по логике /Под ред. Д.П.Горского. М., 1991.

Замечу, что первое определение полностью согласовано с известным принципом Лейбница (principium identitatis indiscernibilium), а второе нет.

Однако это не помешало автору второго определения войти в противоречие с собственным определением и несколькими строками ниже заявить: «Впервые в самой общей и идеализированной формулировке понятие тождества двух предметов дал Г.В.Лейбниц».

Разберёмся по существу.

Каюсь, в своей первой статье о тождестве я допустил ту же ошибку, когда толковал принцип Лейбница, используя гипотезу об отождествлении различного. Правда, там я постарался избежать противоречия и объяснить основания для такого толкования, применив два новых понятия — онтологическую и гносеологическую неразличимость, которых нет в философии Лейбница. Получилась, по существу, полезная модернизация принципа, но всё же модернизация, а не аутентичное его понимание. Поэтому исправлю свою ошибку сейчас.

Строго говоря, Лейбниц никогда не поддерживал доктрину относительного тождества и уж тем более тождества различных объектов. Утверждая, что «равных и совершенно подобных... нет в природе», что не бывает «никаких *двух* (курсив мой — *М.Н.*) неразличимых друг от друга отдельных вещей»[73], он, конечно, имел в виду прямой смысл этих утверждений без каких-либо ссылок на абстракцию отождествления или абстракцию неразличимости, которых не было в тогдашнем философском лексиконе. Да Лейбниц и не принял бы их, не поставил бы их в связь со своим принципом, если бы ему предложили это сделать: «Если две неразличимые вещи существовали бы, то их, конечно, было бы две, однако такое предположение ошибочно и противоречит великому принципу основания»[74].

В противовес Лейбницу доктрину возможности двух неразличимых защищал Кларк: «Если Бог может создавать или создал две точно одинаковые частицы, относительно которых их взаимный обмен местами был бы совершенно безразличным, то этим понятие достаточного основания, защищаемое моим учёным оппонентом, рушится... Может ли он доказать невозможность наличия у Бога мудрых оснований, побудивших его создавать множество совершенно одинаковых частей материи в различных частях универсума?»[75].

---

[73] *Лейбниц Г.В.* Соч. Т. 1. М., 1982. С. 450.

[74] Там же. С. 472.

[75] Кларк в письме к Лейбницу // Там же. С. 505.

Примечательно, что в словах Кларка ясно звучит основной мотив современной квантовой физики. Но тогда этой физики не существовало, и Кларк свои аргументы (равно как и Лейбниц свои) ими обосновать не мог.

Однако ясно, что совпадение всех родо-видовых свойств, порождающее одинаковость объектов и обеспечивающее их (контекстуальную) подстановочность, вообще говоря, не ограничивает их числа (даже если речь идёт о ***совершенно одинаковых***!) — род (или вид) может быть бесконечной совокупностью. Но совпадение наряду с родо-видовыми и ***всех*** индивидуальных свойств естественно приводит к одному объекту (к одночленной совокупности) или к совокупности, в которой объекты различимы лишь условно-нумерически. Это Лейбниц и называл индивидуацией. Точнее, я бы сказал, «онтологической индивидуацией». Вопрос только в том, возможна ли такая индивидуация.

Лейбниц принимал индивидуацию как метафизический принцип (principium individuationis) в соответствии со схоластической традицией, исключая нумерацию как постороннюю для характеристики объектов. Именно ссылкой на этот принцип он защищался от аргументации Кларка, которая, по мысли Лейбница, была беспомощна по отношению к принципу индивидуации. Мы знаем теперь, что этот лейбницевский принцип рухнул[76].

Что же осталось от «великих принципов метафизики» — принципа индивидуации и принципа тождества неразличимых? Давайте посмотрим, как можем мы переосмыслить и реабилитировать один и другой.

Начну с того, что понятию «интервал абстракции отождествления», определённому для некоторой области предметов, естественно сопоставить некий способ введения отношения типа равенства (эквивалентности) на элементах этой области. После чего, как известно, как бы «на втором этаже», возникает новый универсум, где элементами служат уже классы разбиения по данному отношению, или, что равносильно, «эталонные представители этих классов»[77].

---

[76] Однако, думается, он рухнул не окончательно, если воспользоваться моей аргументацией, основанной на различении онтологической и гносеологической индивидуации. Подробнее см. первую часть этой книги (гл. 4) или: *Новосёлов М.М.* Индивидуация // Новая философская энциклопедия. Т. 2. М., 2001.

[77] *Виленкин Н.Я., Шрейдер Ю.А.*, Понятия математики и объекты науки // Вопросы философии. 1974. № 2. С. 126.

В качестве следствия получаем, что на элементах нового универсума (на классах разбиения или их эталонных представителях) индуцируется отношение тождества в строгом соответствии с принципом Лейбница. Это отношение тождества является диагональным, то есть выражается формулой $a = a$. Таким образом, для абстрактных объектов (классы разбиения — это классы абстракции) принцип индивидуации (самотождественность) и принцип тождества неразличимых сохраняются.

Однако сохраняются они за счёт ***релятивизации универсума***, то есть за счёт отказа от единой индивидной области. А это немаловажный факт для оценки классической концепции. В связи с этим сошлюсь на косвенно связанную с данным фактом давнюю мою гипотезу о том, что никакая возможная индивидуация не может вывести нас «за пределы того *интервала абстракции*, которым определяется *универсум рассуждения*»[78].

Я думаю, сказанное можно обобщить и согласиться с тем, что мы всегда можем так изменить (или подобрать) универсум рассуждения, что тождество будет иметь абсолютный смысл (а именно тот смысл, который имел в виду Лейбниц), даже если мы проигнорируем референциальный смысл тождества.

В самом деле, хотя, на первый взгляд, в классическом аксиоматическом определении тождества предусмотрена возможность противоречащего случая, поскольку подстановка различных объектов на место переменных в предикат тождества разрешена, всё же истинность предиката обусловлена не различием этих объектов, а их подстановочностью. Поэтому ответ на вопрос о том, тождественны объекты или нет, сводится к поиску контрпримера для подстановочности. Но если запас признаков определён, тождество, по определению, принимает смысл неразличимости по всем признакам этого запаса, так что контрпример невозможен. Правда, в этом случае оно уже не будет логическим понятием в универсальном смысле, который, возможно, имел в виду Фреге. Но в интервале абстракций теории такое тождество полностью сохранит чисто логический смысл.

По-видимому, это решение не удовлетворит Гича, поскольку всякий относительный универсум связан с определённой идеологией, что и порождает относительность тождества. А интервальной семантикой для разъяснения понятий «абсолютный» или «относительный»

[78] Тождество // Философская энциклопедия. Т. 5. М., 1970.

(как и понятием «интервал абстракции») Гич не пользуется. Иными словами, он не связывает термины «абсолютный» и «относительный» с положением наблюдателя, как это необходимо было бы делать в духе современной науки.

Однако есть ещё один путь спасти лейбницевский принцип, причём в его неограниченной абстрактной общности. И такое «спасение» будет, между прочим, соответствовать замыслу самого Лейбница.

Посмотрим, как можно было бы ещё понимать термин «абсолютное тождество». Мы знаем, что эквивалентность — это не тождество, хотя и толкуем тождество как эквивалентность. Конечно, для раннего Фреге, равно как и для Лейбница, такое толкование неприемлемо. Для них тождество является понятием абсолютным, независимым от того, в какой теории и на каком универсуме оно «работает».

Но ограничимся для начала какой-либо теорией, на универсуме которой мы можем (согласно сказанному выше) определять различные эквивалентности. Выберем такую эквивалентность, которая устойчива по отношению ко всем членам сигнатуры этой теории, то есть сохраняет операции, отношения и функции, определённые для этой теории. Такая эквивалентность будет ***предельной*** среди всех других отношений типа равенства, характерных для данной теории. Поэтому эту эквивалентность естественно называть тождеством в данной теории. Но, как уже отмечалось выше, сохраняя полностью интуитивный смысл понятия «тождество», она всё же будет тождеством только относительно идеологии данной теории.

Теперь потребуем, чтобы эквивалентность с данными свойствами, выполнялась в универсуме каждой теории (модели). И только такую эквивалентность согласимся считать (называть) абсолютным тождеством. Гич называет такое тождество реальным (термин «реальное тождество» встречается у Зигварта) и считает его противоречивым.

Допустим, однако, что такое тождество всё же существует (как понятие, но не как идея!). Что же это за понятие и как его выразить? Я думаю, что возможен только один ответ на этот вопрос, и ответ этот, как ни парадоксально, подсказан Фреге: «Если ... надо представить вещи максимально общим образом, то потребуется разыскать такое понятие, которое стоит выше всех других понятий. Это понятие, если иметь в виду, что оно именно таково, обладая неограниченным объёмом, не имеет никакого содержания, ведь любое содержание может состоять лишь в известном ограничении объёма. В качестве такового может быть выбрано понятие "самотождественный"»[79].

Замечательно это свидетельство Фреге против собственного представления о тождестве как абсолютном (аналитическом) понятии[80]. Видимо, к 1892-ому году Фреге сознавал, что аналитическим (абсолютным) может быть только традиционное (для него лишённое содержания) тождество в форме закона ***a = a***. В данном случае речь, конечно, о том тождестве, которое Фреге называет «тождеством содержаний», которое одно для него теоретически значимо и которое выражается суждением (или предикатом) ***a = b***. По отношению к такому тождеству (а оно, собственно, и является объектом критики Гича) Фреге утверждает следующее: «суждение, имеющее предметом одинаковость содержаний, является *синтетическим* (курсив мой — *М.Н.*) в кантовском смысле»[81].

Это очень важный пункт, где позиции Лейбница и Фреге совершенно расходятся. Для Лейбница (как позднее и для Рассела) принцип тождества неразличимых является аналитическим. Следовательно, не может быть никаких двух неразличимых в смысле Кларка: «Если две вещи совершенно одинаковы, то из-за этого они всё же не перестают быть двумя вещами»[82].

Спрашивается, как преодолеть это утверждение Кларка, оставаясь на почве аналитической точки зрения?

Интервальная концепция тождества позволяет нам это сделать, релятивизируя универсум и абсолютизируя смысл. А если не пользоваться интервальными понятиями (в частности, такими как «интервал абстракции», «внутри» и «снаружи»), то преодолеть его можно только одним способом — необходимо, чтобы принцип тождества неразличимых и принцип индивидуации совпадали, то есть представляли собой один и тот же принцип.

Согласиться с тем, что его знаменитый принцип — это всего лишь иное выражение традиционного закона тождества, пресловутого ***a = a***, для Лейбница, было слишком. Поэтому его философия полна настойчивых и туманных намёков на связь (но не совпадение)

---

[79] *Фреге Г.* Избранные работы. М., 1997. С. 20.

[80] См. выше цитату из Grundgesetze.

[81] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. М., 2000. С. 79.

[82] Кларк в письме к Лейбницу // *Лнйбниц Г.В.* Соч. Т. 1. М., 1982. С. 458.

обоих принципов (индивидуации и тождества неразличимых), а его знаменитая полемика с Кларком, приняв богословский оттенок, закончилась безрезультатно.

2.9. Интервал абстракции и тождество как идея

В этом параграфе, говоря о понятиях, я буду предполагать, что в их семантике отражаются, как правило, два плана их реального значения — операциональный план, связанный с контекстуальным употреблением понятия, с его «материальным» вхождением в тот или иной языковый текст (на чём настаивал Фреге); и план эйдический, связанный с интеллигибельным характером понятия, зависимый не от языковой структуры текста, а от структуры словаря и, следовательно, априорный по отношению к любому данному употреблению понятия. Это своего рода обобщённый образ (форма) всех возможных его употреблений.

Конечно, мы можем определить значение понятия по факту его вхождения в структуру фразы. Но обычно это не будет полным его значением. Полное значение понятия предполагает «технологию рождения» понятия «самого по себе». Именно с эйдическим планом мы связываем возможность, говорить ***об одном и том же*** понятии в различных контекстах.

Хотя границы указанных выше двух планов не для всех понятий легко обозримы, они всё же есть. Примером может служить понятие длины, которое ощутимо имеет и операциональный, и эйдический план. Первый выражается в его метрическом значении, второй — в его определении через абстракцию.

Операциональную семантику понятия я когда-то назвал ***контекстно-детерминированной***, а эйдическую — ***контекстно-свободной***, не претендуя на связь этих названий с аналогичными в математической лингвистике. Для меня важно было подчеркнуть ситуацию, которая в логической семантике, как правило, игнорируется.

Очевидно, что контекстно-детерминированная семантика по существу прагматична, она связана с целевой функцией, с условиями, определяющими употребление понятия. Напротив, контекстно-свободная семантика, не обременённая какими-либо целевыми функциями и условиями момента, играет регулятивную роль по отношению к способам употребления понятия. Она канонизирует операциональный план, определяет допустимые его границы. Известно, что можно употреблять понятие в соответствии с его идеей, а можно профанировать эту идею, употребляя понятие «не надлежащим образом». Исключение эйдического плана из семантики понятия привело бы к разрушению диахронии языка, к лексическому релятивизму, хотя необязательно (за исключением, быть может, формализованных языков), чтобы контекстно-детерминированная семантика понятия была всецело подчинена его контестно-свободной семантике.

Эта принятая мной классификация семантик естественно просматривается и в семантике понятия тождества. Тому, что я называю логикой тождества, или логическим аспектом тождества, соответствует контекстно-свободная семантика. А тому, что я называю гносеологией тождества, его гносеологическим аспектом, соответствует контекстно-детерминированная семантика.

Названные аспекты дополнительны. В логическом аспекте, когда понятие тождества мыслится вне контекста, игнорируются фактические процедуры отождествлений, которые мы de facto предпринимаем в теории, игнорируется зависимость результатов отождествлений от условий или способов отождествлений, от явно или неявно принимаемых при этом абстракций. Это позволяет считать, что обычные аксиомы тождества определяют предикат тождества однозначно, что этот предикат ***единствен***. По существу логика тождества выражается логической функцией, сопоставляемой любому предикату (суждению), которое мы соглашаемся считать предикатом (суждением) тождества. Этим логическое значение понятия тождества «предопределено заранее» (С.К.Клини).

В гносеологическом аспекте, напротив, мы сталкиваемся с двойной задачей. С одной стороны, удовлетворить требования логики тождества, с другой — реализовать эти требования в определённых условиях, заданных смыслом собственных предикатов теории с присущими этой теории возможностями отождествлений. Такие ситуации, вообще говоря, позволяют рассматривать предикат тождества как ***переменный***, аналогично другим предикатам чистой логики.

Когда тождество объектов ***a*** и ***b*** понимается в том смысле, что всё, что на языке данной теории можно сказать об ***a***, можно сказать и о ***b***, понятие тождества, конечно же, относительно ко всему, что можно о них сказать в этой теории. В таких случаях мы естественно говорим о «конкретном воплощении» наших представлений об ***одном и***

том же в интервале абстракций данной теории. Но как раз в этом интервале (внутри теории) тождество сохраняет свой абсолютный логический смысл.

Иначе говоря, в приложениях аксиом чистой логики всегда открыто поле для применения абстракций отождествления или неразличимости. Но понятие тождества, которое мы при этом действительно получаем можно (и даже естественно) назвать прикладным, поскольку оно представимо результатом замены общей аксиомы подстановочности (с переменными предикатами) конечным списком её аллоформ — структурно подобных ей содержательных аксиом с индивидуальными предикатами данной теории. А это означает, что на практике абсолютное тождество используется как тождество через абстракцию[83].

Я думаю, именно это понятие тождества через абстракцию должен был иметь в виду Гич, связывая понятие тождества с определённой идеологией теории и, на этом основании, настаивая на относительности тождества. Но при этом достаточно было бы вспомнить, что такого рода относительность в логике подразумевалась всегда с той небольшой оговоркой, что в отличие от прочих относительных равенств тождество «означает не какое-нибудь одностороннее совпадение, а ***совпадение вообще*** — по меньшей мере, постольку, поскольку в расчёт принимаются признаки, могущие быть выраженными посредством основных предикатов рассматриваемой теории»[84].

Поскольку ***полнота совпадения*** выражается в аксиоме подстановочности, существенно, что собственно логический вид этой аксиомы требует формульных переменных. А это и даёт нам основание говорить о логическом тождестве как абсолютном понятии.

Сказанного, возможно, достаточно, чтобы придти к выводу, что критика Гича отнюдь не колеблет наши представления об абсолютном тождестве. Но она по крайней мере ставит вопрос о «расщеплении» понятия «тождество» на два понятия с особым смыслом для каждого.

В связи с этим напомню, что «метод расщепления понятий (на два или большее их число) в соответствии с возможными различными оттенками смысла есть один из наиболее важных способов уточнения

---

[83] Более пространное изложение гносеологии тождества и её интервального смысла можно найти в моей статье «Категория тождества и её модели» // Кибернетика и диалектика. М., 1978.

[84] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. С. 213.

(конкретизации) смысла выражений. Этот метод постоянно используется наукой, когда речь идёт именно о логическом анализе значения выражений и уточнении их смысла»[85].

Конечно же, я не случайно выбрал термин «категория тождества» для названия своей статьи. С одной стороны, он естественно вписывался в традиционную (аристотелевскую) философскую лексику, а с другой, — позволял отделить категорию тождества от понятий тождества как прикладных вариантов (моделей) категории.

Но сейчас мне хотелось бы воспользоваться другой терминологией, позаимствовав у Фреге любопытное выражение — «понятийное слово». Фреге применял этот термин к выражениям, значением которых служат понятия, и соответствующим образом определял его смысл. В моём словаре понятийное слово равносильно понятию «идея», с которого я начал эту главу и смысл которого обещал разъяснить по ходу дела. Теперь я могу это сделать, так сказать, «за чужой счёт», избавляясь от явного платонистского привкуса, связанного со словом «идея».

В самом деле, понятийное слово может помочь нам реабилитировать концепцию абсолютного тождества, если термин «абсолютное тождество» мы примем как понятийное слово. Тогда совокупность прикладных (относительных) понятий тождества составит объём этого слова. При этом нам вовсе не надо ничего знать о том, существуют ли в универсумах наших теорий абсолютно тождественные предметы или нет. Дело в том, что «понятийное слово может быть логически совершенно неуязвимым — невзирая на то, существует ли предмет, к которому оно благодаря своему смыслу и своему значению (самому понятию) прямо относится»[86]. Единственное, что необходимо требовать от соответствующих понятийных слов, это «чтобы переход от слов к смыслам и от смыслов к значениям был определён (bestimmt) с полной несомненностью»[87]. Но этому последнему требованию, надеюсь, вполне удовлетворяют данные мной ранее разъяснения, основанные на представлениях об интервальной природе всех наших понятий.

---

[85] *Яновская С.А.* Предисловие // *Карнап Р.* Значение и необходимость. М., 1959. С. 11.

[86] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. С. 252.

[87] Там же.

2.10. Ещё немного о тождестве

Потребность в формальных теориях тождества — это частное выражение общей потребности в уточнении понятий. Известно, что формализация и аксиоматизация теории тождества выявила недостаточность традиционного закона тождества для семантической полноты наших представлений о тождестве. Более того, выразительных возможностей этого закона оказалось недостаточно для характеризации даже более слабых понятий. Но тем, что формулу традиционного закона (***a*** = ***a***) стали толковать как закон рефлексивности, то есть только как некоторое свойство тождества, ещё не была удовлетворена потребность в гносеологическом истолковании традиционного закона. И выше я достаточно говорил об этом.

Но одно замечание стоит сделать ещё. Из приведённой выше цитаты из Фреге напрашивается вывод не только о пустоте традиционного закона тождества (самотождественности), но и о тривиальности и бесполезности этого закона для самой теории. Однако это не так. Во-первых, традиционный закон тождества (и его формула) является независимым по отношению к аксиоме подстановочности (правилу замены равного равным) первопорядковой логики. Во-вторых, он не выводится из аксиом транзитивности и симметрии, так что без него (или дедуктивно равной ему замены) нельзя осуществить разбиение на классы абстракции, а, следовательно, невозможны и определения через абстракцию. Таким образом, можно сказать, что индивидуация (самотождественность) является весьма важным логическим фактом в общей системе представлений о тождестве.

И ещё одно обстоятельство следует принять во внимание, когда мы говорим о тождестве. Фреге, кажется, первый заметил двойственный смысл знака равенства для выражения суждений о тождестве. С одной стороны, знак равенства необходим для выражения *одинаковости* содержаний; с другой, поскольку одно и то же содержание может быть определено совершенно разными способами, — «мы должны использовать два разных имени, отвечающих этим двум способам определения». Следовательно, в информативном суждении тождества знак равенства должен соединять *различные* термы. «Отсюда вытекает, что различие имён для одного и того же содержания — это не всегда пустая формальность: оно касается самого существа вопроса»[88].

---

[88] *Фреге Г.* Логика и логическая семантика. С.79. В другом месте, однако, читаем: тождество «мыслимо только относительно предметов, но не понятий» (Там же. С. 249).

Фреге акцентирует внимание на содержательном аспекте суждений тождества. Однако, коль скоро речь идёт о чистой логике, необходимо позаботиться о том, чтобы смысл выражения «одно и тот же» перестал зависеть от способов определения какого-либо содержания, перестал быть интуитивным. Необходимо, чтобы он определялся только самой формальной теорией тождества, оставаясь ***инвариантным*** во всех её возможных применениях. Это обеспечит общенаучное значение теории.

Иными словами, в формальной характеристике понятия тождества необходимо «снять» какие-либо ссылки на абстракции отождествления или неразличимости, но не совсем, а лишь настолько, чтобы сохранить названную инвариантность. Обычный метод её сохранить — дать аксиоматическое представление формальной теории тождества, при котором смысл выражения «одно и то же» (или «один и тот же») полностью согласован с аксиомой (схемой аксиом) подстановочности. Такое согласование одновременно исключает всякий тезис об относительности тождества в его чистом логическом понимании или о возможности «множества логических тождеств», определимых на одной и той же структуре[89].

В самом деле, в аксиоме подстановочности условия $A(x)$ и $A(y)$ различаются только графикой предметных переменных. Этим учитывается возможная связь отношения тождества с операциями отождествления или неразличимости, когда это отношение основывается на той или иной абстракции. Этот учёт явно выражается в «называющей форме» (С.К.Клини) для элементарного двуместного предиката тождества, то есть в формуле $x = y$. Поскольку предметные переменные в этой формуле независимы, а выбор их значений произволен, нет гарантии, что условия $A(x)$ и $A(y)$ всегда будут принимать одно и то же истинностное значение при одновременном выборе значений для их свободных предметных переменных. Но если этот выбор обусловить совпадением указанных значений, то истинностные значения условий тоже совпадут. Этим решается вопрос о подстановочности тождественных в силу ***фактической истинности*** суждений тождества, о которых говорит Фреге.

Нам, однако, важнее сейчас другой факт. Суждение ***$a = b$ логически истинно***, только если формула ($A(a) \supset A(b)$) общезначима. А при произвольном условии $A(z)$ она общезначима только в од-

---

[89] См.: *Робинсон А.* Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М., 1967.

ноэлементной области. Этим отвергается ходячее мнение о каком-либо «тождестве различных» в логике, по крайней мере в интервале её собственных абстракций.

Конечно, это не означает, что собственные абстракции логики не зависят от определённых гносеологических предпосылок. Если существуют различные объекты, то существуют (могут быть указаны) и различающие их предикаты. Это одна из предпосылок, которая используется при доказательствах того, что гильбертовские аксиомы тождества однозначно характеризуют предикат тождества. Контрапозиция этой посылки говорит о том, что мы «слепнем» без таких различающих предикатов, не теоретически, а фактически оказываясь в ситуации «тождества неразличимых». Но подобной слепотой отличаются и все теоремы чистой логики. К счастью, выразительные возможности логической теории тождества заметно богаче модели, предлагаемой семантикой общезначимых истин, а ценность этой теории (как раз в силу абстракций, положенных в её основу!) — в её универсальной приложимости к миру фактических истин, где суждения о тождестве, вообще говоря, не являются тавтологичными.

2.11. П.А.Флоренский о проблеме тождества

Мысль обсудить идеи Флоренского в той части, в какой они касаются тождества, возникла у меня в связи с поставленным выше вопросом, является ли тождество абсолютным. Как бы там ни было, но из тех русских мыслителей, которых в начале прошлого века волновала тема тождества, включая и логиков ex professo, Флоренский был чуть ли не единственным, кто решился, поскольку речь идёт о тождестве, критически обсуждать результаты логистики. Причём Флоренский заметил одно весьма важное, с точки зрения общего подхода к проблеме, обстоятельство: говоря о тождестве, как правило, подразумевают мёртвую природу, даже если речь идёт о законах мышления. Хотя объектом рассуждений являются продукты мышления, сама их основа, ***личность***, остаётся вне обсуждений. Ведущая мысль Флоренского — придать проблеме тождества антропологический смысл. Он не отвергает расхожих представлений о тождестве, но требует выделить два несовпадающих и (по сути) несовместимых вида тождеств — «тождество личное» (или тождество личности) и «тождество вещное». Такая классификация основана на подчёркнутой им противоположности ***лица*** и ***вещи***.

Тождество, относимое к лицу, Флоренский называет *числовым*, или нумерическим, а тождество, относимое к вещи, — тождеством понятия. Для последнего вполне годится «рассудочный закон тождества» в его логистической форме. Для первого этот закон не годится.

В самом деле, всякая «*вещь* характеризуется через своё *внешнее* единство, т.е. через единство суммы признаков, тогда как *лицо* имеет свой существенный характер в единстве *внутреннем*, т.е. в единстве деятельности самопостроения, в том самом самоположении Я, о котором говорит *Фихте*. Следовательно, тождество вещей устанавливается через тождество *понятий*, а тождество личности — через единство *самопострояющей* или *самополагающей* её *деятельности*»[90].

Из этих слов нетрудно заключить, что всё, что было сказано в предыдущих параграфах этой главы, относится к тождеству понятий, но не к тождеству личности. Флоренский не определяет само понятие «тождество личности». Определить, говорит он, значит дать понятие. Определить личное тождество, значило бы дать понятие личности, что невозможно. И, между прочим, он замечает, что в тех случаях, «где с тождеством нумерическим считались, попытка определить этот термин всегда оставалась или простым пояснением, или указанием, что источник идеи нумерического тождества должно искать в самотождестве сознания»[91].

Известно, что проблема точного определения — это проблема многих исходных понятий, а «тождество в собственном и первичном смысле может быть усматриваемо лишь в самотождестве *личности*, а не в самоподобии вещи»[92]. Иными словами, согласно Флоренскому, родословную всякого тождества (в том числе и логических законов тождества) надо вести от нашего духовного Я.

Первое явное указание на этот счёт, которое приходит на ум (если искать истоки), — это трансцендентальная апперцепция Канта, отчасти заимствованная им у Лейбница. Об этом говорит и сам Флоренский. Но поскольку Флоренский определения не даёт, я могу порассуждать свободно и высказать гипотезу, что его идея личного тождества — это попытка осмыслить в логических терминах факт индивидуации в его антропологической постановке, ко-

---

[90] *Флоренский П.А.* Оправдание космоса. СПб., 1994. С. 76.
[91] Там же. С. 79.
[92] Там же. С. 79-80.

торая много позднее станет доминирующим понятием психоанализа и получит более развёрнутое описание в аналитической психологии К.Юнга[93].

Если так, то личное тождество получает единственное оправданное формальное выражение посредством пресловутого закона ***a* = *a***. Что же касается подстановочности, то для выражения личного тождества (в смысле Флоренского), она не годится. Под общее определение подпадает только тот вариант личного тождества, который я называю гносеологической индивидуацией. Это признаковая индивидуация в интервале допустимых абстракций отождествления или неразличимости — общий случай для личности и для вещи. Но понятие «о *числовом* тождестве неприложимо к ***вещам***: вещь может быть лишь «такая же» или «не такая же», но никогда — «та же» или «не та же»»[94].

В этих словах угадывается принцип тождества неразличимых, обращённый на личность. И это впечатление усиливается, когда Флоренский отрицает всякую возможность абсолютного тождества вещей: «о двух вещах никогда нельзя в *строгом смысле слова* сказать, что они «тождественны»; они лишь «сходны», хотя бы даже и «во всём», лишь *подобны* друг другу, хотя бы и по *всем* признакам». Поэтому тождество вещей (их индивидуация) может быть только «*признаковым* по тому или иному числу признаков, *включая* сюда совпадение по трансфинитному множеству признаков и даже — предельный случай — *по всем* признакам»[95].

Согласиться с последним, значит признать, что личность в такой же степени in facto как и in potentia. А это значит признать ноумен (νούμενον) онтологической индивидуации, непознаваемой и невыразимой.

И Флоренский заключает: «Общий вывод из сказанного ясен: определение тождества, чем оно строже, тем отчётливее обособляет в свой предмет тождество ***признаковое*** и тем решительнее исключает из рассмотрения своего тождество ***нумерическое***; при этом оно имеет дело исключительно с ***вещами***. Напротив, когда считаются с тождеством нумерическим, то тогда могут лишь описывать его, пояснять его, ссылаясь на источник происхождения идеи тождества, и при этом названный источник, названное первотождество находят в недрах живой личности»[96].

---

[93] См.: *Юнг К.Г.* Тэвистокские лекции. Ваклер, 1998. О философской истории вопроса можно почитать в ст.: *Гайденко П.П.* Индивидуум // Новая философская энциклопедия. Т. 2. М., 2001 и в моей статье «Индивидуация», опубликованной там же.

[94] *Флоренский П.А.* Оправдание космоса... С. 76.

[95] Там же.

[96] Там же. С.80.

ГЛАВ 3. АБСТРАКЦИЯ И ЛОГИКА НЕРАЗЛИЧИМОСТЕЙ

Законы ... логики, которые в широком смысле всегда включены в состав посылок информационных систем, являются предметом критического переосмысления и анализа.

Ковальски Р.
«Логика в решении проблем»

3.1. Ещё раз о гносеологической точности

Вернёмся на минуту к теме, которой закончилась первая часть этой книги, а именно, к теме гносеологической точности.

Начну с примера. В теории ошибок (в теории и практике приближённых вычислений) принята гипотеза об истинном значении измеряемой величины — ***точечном образе***, зачастую неопределимом и чисто теоретическом, хотя как-то уточняемом в границах его фактических приближений, задаваемых, кстати сказать, неоднозначно. Согласимся, что о «приближении» уместно говорить лишь тогда, когда известно то, к чему приближаются. Но это «то», как правило, неизвестно. Измерением мы отчасти снимаем априорную неопределённость измеряемой величины. Но это только уменьшение неопределённости, а не индивидуация точного значения. В результате подлинным dramatis personae в численном анализе оказывается ***интервальный образ*** измеряемой величины, а не точечный. Последний остаётся своего рода идеальной (парадигмальной) предпосылкой познания.

Может показаться, что этот частный пример из теории измерений mutatis mutandis обобщается на класс всех эмпирических теорий, влияющих на формирование образов реальности. Однако следствия, вытекающие из «природы» измерений, не всегда, по-видимому, оказывают влияние на принимаемое в теории представление о неразличимости тех или иных объектов. К примеру, в квантовой механике элементарные частицы материи сравнивают по их квантовым состояниям, которые в свою очередь полностью определяются волновой функцией, а эта последняя «по самой своей природе является величиной неизмеримой»[1]. Поэтому квантовомеханическая идея тождества не является следствием абстракции эмпирической неразличимости. Принцип тождества неразличимых квантовой механики — это теоретический постулат, обязательный в ней, «если мы хотим получать из квантовой механики выводы, согласующиеся с опытом»[2], например, — с фактом обменного взаимодействия.

Эта (и не только эта) согласованность принятого a priori с данным a posteriori для меня является загадкой. Но очевидно, что и в неклассической модели «элемент концептуализации подразумевается на всех уровнях реальности»[3].

Но тогда возникает естественный вопрос — оправдана ли (и насколько) точка зрения, что абстракция является символом (выражением) «приближённого описания, вторжением субъективных взглядов в точный мир»[4]. Разве нет у нас оснований (не скажу пока достаточных!), чтобы говорить о «всепроникающей неточности реального мира»?[5].

Но если в онтологию допускается абстрактная реальность, то по меньшей мере сомнительно, что научное знание на любом этапе его «теоретической жизни» имеет принципиально приближённый характер. Такая философия побуждала бы нас заключить, «что наука неизбежно пребывает в заблуждении», поскольку результаты, полученные «каждым последующим поколением учёных» должны рассматриваться только как «более хорошее приближение к конечной (неизвестно какой — *М.Н.*) доктрине»[6].

В первой части этой книги я настойчиво подчёркивал, что интервальная концепция основывается на принципе самодостаточности абстракций. Она исходит из того, что хотя информация, извлекаемая из опыта, обусловлена его метрической точностью, это не означает, что той же точностью однозначно обусловлено и информационное содержание абстракции, связанной с этим опытом. Если любой опыт не обеспечивает информационной

---

1 *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М., 1983. С. 119.

2 Там же. С. 493.

3 *Пригожин И., Стенгерс И.*, Порядок их хаоса, М., 1986, с. 290.

4 Там же. С. 300.

5 *Заде Л.А.* Предисловие к кн.: *Кофман А.* Введение в теорию нечётких множеств. М., 1982. С. 6. Однажды я уже приводил слова Макса Борна, что «математическое понятие точки континуума не имеет непосредственного физического смысла».

6 *Мак-Витти Г.* Общая теория относительности и космология. М., 1961. С. 21.

полноты знания, то о любой абстракции этого сказать нельзя. Абстракция, верная в пределах точности данного опыта, может оказаться (и если эта абстракция хорошая, то, как правило, и оказывается) верной в пределах более широкого опыта, когда точность неопределённо растёт. Следовательно, ***энтропия опыта преодолевается именно за счёт абстракции***. Методологически это исключительно важно. Но, чтобы обосновать право на истинность абстракции (на «абсолютность закона»), необходимо ***указать меру её полноты***. Для случая гносеологической точности эта мера выражается интервальным числом, соответствующим классу ε-моделей абстракции.

Временами кажется, что есть истины, которые так очевидны, что забота об их теоретическом оправдании не стоит труда. Если же сомнение в наглядном доказательстве таких истин иногда возникает[7], то мы полагаемся на авторитет логики, которая призвана разрешать все противоречия между теорией и опытом.

Однако почти столетие назад Анри Пуанкаре указал на противоречие между наблюдаемой (наглядной) неразличимостью, выражающей по существу смысл ***эмпирического равенства***, и равенством в его традиционном логическом смысле. С тех пор известная философская проблема тождества неразличимых предстала как парадокс, который я рискнул назвать ***парадоксом транзитивности***[8] (или, иногда, парадоксом Пуанкаре), поскольку это противоречие (как опытный факт) имеет неизбежный характер. Парадокс транзитивности предстал для Пуанкаре «нетерпимым противоречием», характерным для континуума, который сам Пуанкаре назвал эмпирическим.

Правда, Э. Борель усмотрел в этом противоречии простую ошибку опыта и высказал возражения в адрес рассуждений А. Пуанкаре[9]. Пуанкаре на эти возражения не ответил. И это послужило Борелю основанием сказать, что Пуанкаре с его возражениями согласился. Но молчание не всегда знак согласия. Не случайно же, составляя список своих самых значительных открытий, А. Пуанкаре включил в их число свои идеи об эмпирическом континууме: «Я изучал происхождение математического понятия континуума и показал, что оно не

---

[7] «А что может противостоять наглядному доказательству?» (*Беркли Дж.* Три разговора между Гиласом и Филонусом. М., 1937. С. 99).

[8] *Новосёлов М.М.* Тождество и неразличимость // VII Всесоюз. симпозиум по логике и методологии науки: Тез. сообщений. Киев, 1976.

[9] *Борель Э.* Вероятность и достоверность. М., 1961.

могло быть выведено из опыта и во многом отличается от понятия физического континуума, которое мы получаем через чувства. Это последнее управляется известным «законом Фехнера», который (если желать буквально выразить опыты, служащие ему основанием) должны быть записаны противоречивой формулой **A** > **B**, **A** = **C**, **C** = **B**. Для снятия этого противоречия разум *создал* математический континуум»[10].

Похоже, Пуанкаре был убеждён, что теория измерений должна опираться на гипотезу существования истинных значений эмпирических величин в виде так называемых абстрактных сущностей, онтологический статус которых не поддаётся экспериментальной проверке. И именно к этому сводились возражения Бореля, снимавшие противоречие предельным переходом к истинным значениям эмпирических величин.

Но мне эти возражения Бореля напоминают ignoratio elenchi, поскольку в рассуждениях Пуанкаре речь вовсе не о том, как, опираясь на аксиомы логики, исправить наглядные ошибки опыта. Пуанкаре сам указывает, как это делается при логическом построении математического континуума. Но он настаивает на том, что существует ***точка разрыва*** между опытом и теорией, преодолеть которую можно лишь отказавшись от противоречивой формулы опыта в пользу теоретической конструкции, обеспечивающей транзитивность равенства. Это его главная мысль. И в этом основа конвенциональности теоретических моделей. Именно эти соображения Пуанкаре в своё время дали мне основание говорить о транзитивности как абстракции, лежащей в фундаменте всех прочих определений через абстракцию[11].

Но пренебречь определённой метрической ситуацией в теоретических целях, не означает устранить эту ситуацию вовсе. Напротив, неустранимость такой ситуации влечёт потребность её логического осмысления в подходящей системе метрических понятий. И эти понятия необходимо было создать. Поэтому для меня в примере, указанном Пуанкаре, речь шла о другом — о собственной ***эмпирической логике***, которая соответствовала бы не рациональным априорным по-

---

[10] *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 3. М., 1974. С. 656.

[11] *Novoselov M.M.* Identity // Great Soviet Encyclopedia. N. Y.-L., 1981. V. 26. P. 79-80.

сылкам, а неустранимой структуре опыта с его sens-data. Сам Пуанкаре вряд ли задумывался над этой возможностью, поскольку главным условием корректности теории он считал её непротиворечивость.

Между тем, в эпоху Пуанкаре немногие вообще обратили внимание на его идеи. Слишком сильна была вера в адекватность логических формализаций тождества, предложенных в качестве уточнения лейбницевского принципа. Казалось, что в лице формирующейся логистики философская интуиция Лейбница приобрела, наконец, точный логический облик.

Правда, в свете интуиционистской программы дело обстояло иначе. По существу в ней подразумевался модальный смысл равенства, а неотличимость (неотделимость) и равенство, вообще говоря, не совпадали. Но идеология интуиционизма не претендавала на область внематематических истин. Между тем, для адекватного анализа парадокса неразличимости необходима была иная установка мышления — требовалось «истинам разума» противопоставить «истины факта» как полноправные (а не ущербные) истины.

Думается, что для ***логики наблюдаемых***, к которой постепенно приближается научное сознание (по мере того, как оно всё больше убеждается в интервальном характере «поведения природы») теория отношений эмпирических неразличимостей будет так же необходима, как сегодня для классической логики необходима привычная теория равенства (тождества). Полвека назад понятие неразличимости вошло в научный обиход пионерскими исследованиями Дж. Фон Неймана и Г.Биркгофа[12], П.Феврие[13] и Ж.Л.Детуша[14] как эхо квантовых эффектов, то есть как следствие иных, чем интервальный, методологических принципов. Сегодня, в связи с проблемами искусственного интеллекта, потребность в интервальном подходе к логическому моделированию понятия неразличимости видна более отчётливо. При этом ясно, что неразличимости необходимо рассматривать (изучать) не «вообще», а дифференцировано, соответственно известному методологическому приёму «расщепления понятий».

В частности, следует принять как факт, что тождество и неразличимость, это разные отношения. Тождество как самотождественность — это самое глубокое свойство вещей, устойчивое к любым их

---

[12] *Birkhoff G., Neumann J. Von.* The logic of quantum mechanics // Annals of Math. 37 (1936).

[13] *Février P.* Sur l'indiscernabilité des corpuscules // J.Phys. Ser. VII/ 1939.

[14] *Destouches J.L.* Sur la mecanique classique et l'intuitionisme // Koninklijke Nrderlandes Akademie van Wetenschappen. Ser. A. Vol. LIV, № 1. 1951.

преобразованиям. Это их атрибутивное свойство. Неразличимость, напротив, очень непрочное (акцидентное) свойство, зависящее, так сказать, от явлений перспективы.

В логике и теории отношений преимущественно исследовались ***качественные неразличимости***, которые, естественно понимать как отношения тождественности в их интервальном смысле. Для них уже установлены все основные их свойства и законы. Их следует отделить от «взвешенных» ***метрических неразличимостей***, как дискретных, так и непрерывных. Например, тех, что я рассматриваю (изучаю) ниже, или тех, что рассматриваются в логике нечетких отношений[15]. Правда, в нечёткой логике отсутствует пока сама идея интервала абстракции, а система понятий, представленная мной ниже, возникла независимо от этой логики и не связана с понятием «размытости». Но «родственность душ» всё же заметна. И я надеюсь, дальнейший анализ это подтвердит.

3.2. Метрическое равенство и *k*-транзитивность

В 7-й главе первой части этой книги я стремился показать, что абстракция неразличимости должна войти в качестве одной из предпосылок (аксиом) в гносеологическую характеристику эмпирических ситуаций, связанных с распознаванием образов. Но главная особенность, которая отличает любую интервальную ситуацию, индуцированную абстракцией неразличимости, от ситуаций, индуцированных абстракцией отождествления, состоит в том, что одну от другой отделяет бесконечность. В реальном процессе познания любой масштаб для сравнения и измерения объектов лежит как бы внутри логарифмической шкалы, концы которой представляют собой абсолютное равенство (логическое тождество) и абсолютную неразличимость. Движение влево по этой шкале также бесконечно, как и движение вправо. Оба конца, вообще говоря, фактически недостижимы. Возможно, это и имел в виду Пуанкаре, когда он говорил о точке разрыва или о том, что на пути от данных опыта к универсальным обобщениям нам приходится «перескакивать бездну».

Эта мысль Пуанкаре мне кажется замечательной. Но в одном мне почему-то не хотелось соглашаться с Пуанкаре. А именно в том, что противоречие, которое даёт нам «голый опыт» неразрешимо. Разу-

---

[15] См.: *Кофман А.* Введение в теорию нечётких множеств. М., 1982. Гл. 3.

меется, я не мог не видеть противоречия. Но я предпочитал рассматривать его не как ***противоречие внутреннее***, а как ***противоречие внешнее***, которое можно преодолеть, если теоретическую ситуацию, основанную на абстракции транзитивности, представить как предельный случай ситуации эмпирической, указанной примером Пуанкаре. Из этого несогласия и родилась у меня мысль о возможной логической характеризации ***отношений с мерой транзитивности***[16]. Это было полезное начало, отмеченное рецензентами. Но оно ещё не решало вопрос. Только позднее, когда контуры логики неразличимостей стали более определёнными, когда появилась ***алгебра неразличимостей*** я окончательно убедился в справедливости априоризма Пуанкаре.

Замечу, что пример, указанный Пуанкаре, позволяет ограничиться классом неразличимостей, свойства которых совпадают со свойствами метрических (приближённых) равенств. И я воспользовался этим счастливым обстоятельством, чтобы обойти те неизбежные трудности, которые возникли бы при рассмотрении неразличимостей в их подлинно гносеологическом смысле. В этом случае мы имели бы слишком много неопределённости для адекватного анализа истинного положения вещей.

Второй мой постулат относится к порядку сравнения объектов на предмет выяснения их метрической неразличимости. Предполагается, что эти объекты линейно упорядочены, то есть образуют цепь. И так, «по цепочке», и происходит их попарное сравнение: каждый последующий до поры до времени сравнивается только с непосредственно ему предшествующим. Представляется вполне возможным (при достаточно малых пороговых значениях), что мы получим в этом случае непрерывный ряд неразличимостей, хотя сравнение достаточно удалённых членов ряда приведёт к парадоксу транзитивности.

Пример Пуанкаре указывает нам как будто только на одну возможность: отношение эмпирической неразличимости рефлексивно и симметрично, но, вообще говоря, оно не транзитивно.

Однако анализ можно продолжить следующим образом.

Пусть $\boldsymbol{R}$ отношение неразличимости, а $\boldsymbol{R}^k$ новое отношение — результат n-кратной (n — натуральное) суперпозиции $\boldsymbol{R}$ на себя; это отношение называют степенью $\boldsymbol{R}$. Запись $\boldsymbol{R}^k$ означает k-ю

---

[16] См.: *Новосёлов М.М.* О некоторых понятиях теории отношений // Кибернетика и современное научное познание. М., 1976.

степень $\boldsymbol{R}$, где $k = n + 1$, если $\boldsymbol{R}$ это n-кратная суперпозиция $\boldsymbol{R}$. Иначе говоря, степени определены только для целых положительных k и $\boldsymbol{R}^1 = \boldsymbol{R}$.

Обычно отношение $\boldsymbol{R}$ называют транзитивным, если оно поглощает любую свою степень. Логическая эквивалентность по определению транзитивна, а из определения логического тождества свойство транзитивности выводится как теорема. Следовательно, эти отношения транзитивны. Я буду говорить о них, что они ***нормально транзитивны***. Вообще, отношение нормально транзитивно на каком-либо множестве, если оно транзитивно на любой последовательности, составленной из элементов этого множества. Ясно, что отношение метрической неразличимости не является нормально транзитивным. Это следует из особенностей эмпирического континуума, отмеченных Пуанкаре.

К примеру, интерпретируя неразличимость как ε-равенство, рефлексивность и симметрию мы непосредственно получаем из свойств абсолютной величины числа. Но этих свойств недостаточно, чтобы обосновать транзитивность. Правда, если $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \geq |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}|$, то $(|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leq \varepsilon)\ \&\ (|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}| \leq \varepsilon) \supset (|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}| \leq \varepsilon)$ истинно. В этом случае интервал $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}| \leq \varepsilon$ целиком лежит в интервале $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| \leq \varepsilon$. Однако при произвольном ε нельзя поручиться за такое «вложение». Вопрос о том, отличима ли точка $\boldsymbol{c}$ от каких-либо точек этого интервала остаётся открытым. Если при данной точности измерения она и неотличима от них, в принципе её всегда можно сделать отличимой, повышая точность измерения.

Это классический постулат об индивидуации точек континуума. В нём кроется ещё одно возражение в адрес аргументации Пуанкаре. В самом деле, с точки зрения классических представлений можно показать, что кажущееся неравенство, $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{c}$, если только абсолютно верны посылки $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, в пределе обращается в равенство. А это и приводит нас к желаемой транзитивности и к убеждению в том, что неразличимость нас обманывает.

Однако допустим, что речь идёт о счётных последовательностях объектов некоторого универсума для которых выполняется формула $\forall \boldsymbol{x}_i\ (\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{x}_{i+1})$. Выберем одну такую последовательность $\boldsymbol{S}$ и назовём неразличимость ***максимально k-транзитивной*** на этой последовательности, если для неё выполняются аксиомы:

$$\forall \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j (i \leq j \leq k + 1\ \&\ \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{R}^k \boldsymbol{x}_j \Rightarrow \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{x}_j), \qquad (1)$$

$$\exists \boldsymbol{x}_i (i \leq k\ \&\ \neg\, \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{x}_{k+2}), \qquad (2)$$

где i, j, k — номера объектов в последовательности $\boldsymbol{S}$ и $k \geq 2$ (это означает, что максимально k-транзитивное отношение не менее, чем 2-транзитивно). Если $\boldsymbol{R}$ неразличимость, то существует такое k, что $\boldsymbol{R}$ максимально k-транзитивно.

Заменим теперь (2) на

$$\exists \boldsymbol{x}_i (i \leq k \ \& \ \neg \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{R} \boldsymbol{x}_{k+n}), \qquad (3)$$

где $n = 2, 3, 4, \ldots$

Отношение, удовлетворяющее аксиомам (1) и (3), я называю ***k-транзитивным***. Без труда проверяется, что максимально k-транзитивное отношение будет и k-транзитивным.

Я называю ***k-тождеством*** рефлексивное, симметричное и k-транзитивное отношение. Очевидно, что любая эмпирическая неразличимость является k-тождеством.

Приведённый анализ отношения неразличимости показывает, как важна информация о ***размерности*** отношения, которое мы считаем или намереваемся считать тождеством (равенством). Чем больше значение k, тем больше у нас оснований, если мы до него ещё не добрались, верить в нормальную транзитивность $\boldsymbol{R}$ и не придавать особый вес длине рассматриваемой последовательности или выбору подходящей последовательности (для опровержения транзитивности достаточно и одной последовательности, но эту последовательность необходимо найти). Мы легко поддаёмся психологической генерализации, особенно если k фактически недостижимо. Например, при $k = \omega$ у нас есть достаточное основание считать, что эмпирическая неразличимость нормально транзитивна, то есть, что эмпирическое и логическое тождества совпадают.

Итак, понятие о транзитивности, релятивизированной относительно k, обобщает понятие о тождестве, включая в общий случай и классическую эквивалентность и лейбницевское тождество неразличимых, когда названные выше аксиомы удовлетворяются только в бесконечности. Между крайними случаями ($k = 2$ и $k = \omega$) лежит множество других, имеющих, возможно, некоторое значение для прикладной логики[17].

---

[17] Эту конструкцию (аксиоматику) я представил в ст.: Категория тождества и её модели // Кибернетика м диалектика. М., 1978; но сформулировал в 1976. См. также: *Novoselov M.M.* Identity with a measure of transitivity // LMPS 87. Abstracts. Vol. 4, pt. 6. M., 1987.

3.3. Непрерывная логика неразличимостей[18]

Согласуясь с особенностями метрического равенства, абстракция неразличимости естественно ослабляет ригоризм классических определений тождества, игнорирующих «пороговые критерии» эмпирических ситуаций. Но из этой же особенности вытекает определённая неадекватность теоретико-множественной трактовки тождества по неразличимости (отношений неразличимости) как свойств n-ок каких-либо объектов, известных до опыта, поскольку, вообще говоря, в случае абстракции неразличимости мы не располагаем готовым множеством объектов, которые мы могли бы по собственному произволу отождествлять (не различать) или различать. Абстракция неразличимости формирует только гносеологический универсум, не давая нам адекватной (исчерпывающей) информации о его онтологическом прообразе.

Интерес к исследованию подобного рода эмпирических ситуаций естественно породил методологическую установку, близкую к традиционному эмпиризму. Я имею в виду установку, которая определила развитие методов логики нечётких множеств, многомерного анализа данных (многомерного шкалирования), кластерного анализа, методов экспертных оценок и вообще всех (по существу когнитивных) методов, с помощью которых надеются объяснить, как возникают субъективные образы объективного мира. К этим именно методам и примыкает теория, которую выше я назвал логикой неразличимостей.

Конечно, неполнота информации, обусловленная одной абстракцией неразличимости, может восполнятся (корректироваться) другой абстракцией. К примеру, увеличение точности измерения (наблюдения) — это уже, возможно, изменение точки зрения на универсум, вообще говоря, уменьшающее, неопределённость (детализирующее объект). И всё же универсум «с точки зрения» — это всегда лишь гносеологический универсум. Поэтому в общем случае желательна интенсиональная теория эмпирических неразличимостей, которая позволила бы отвлечься от «объективного устройства» тех множеств, на которых неразличимости определены. Закрывая глаза на область

[18] Одно из таких приложений дано в ст.: Бирюков Б.В., Новоселов М.М. Свойства объяснения и порядок в системе знаний // Единство научного знания. М., 1988.

определения неразличимостей, мы получаем благоприятную возможность рассмотреть их «все сразу» как объекты новой теории и по-новому рассмотреть логику этих отношений.

Разумеется, я не думаю, что общий случай всех неразличимостей сводится к тому частному случаю, который я рассматриваю ниже. Однако самый удобный случай для логической трактовки отношений неразличимости, когда известна мера точности различения в виде функции расстояния, то есть когда акты сравнения объектов опыта опираются не некоторую метрику, обладающую обычными свойствами:

1) тождества: $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$;
2) симметрии: $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$;
3) треугольника: $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

Во многих важных случаях отношения неразличимости можно задавать таким образом. Например, следующая ниже схема определяет бесконечный класс ε-неразличимостей через функцию евклидова расстояния:

$$xR_\varepsilon y = \begin{cases} 1, \text{ если } \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leq \varepsilon, \\ 0 \quad \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4}$$

где $\varepsilon \geq 0$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $1 \leq i \leq n$.

Определять меру близости через функции расстояний — способ, конечно, не новый. Однако при этом возникает некоторый новый вопрос: нельзя ли множество отношений ε-неразличимости представить как модель какой-либо известной абстрактной структуры, прояснив тем самым и логику этих отношений?

Приведенная выше схема каждую ε-наразличимость определяет как бинарных предикат с классической оценкой истинностных значений. По результатам измерений значений признаков каждому такому предикату можно сопоставить бинарную матрицу с той же оценкой. Тип матрицы здесь несуществен. Существенно лишь, что она включает диагональ. Предикат, соответствующий диагональной матрице, я обозначаю символом $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$. Это выделенный предикат. В общем случае для обозначения предикатов ε-неразличимости при произвольном фиксированном значении ε, равном или α, или β или γ,. . . . , я буду пользоваться выражениями $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$, $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$, $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\gamma}$ и т.д. соответственно. Еще один выделенный предикат ε-неразличимости – это $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$, где символ ∞ в зависимости от контекста может играть двоякую роль: он может служить символом положительной бесконечности в том же смысле, в каком это принято в анализе, и тогда $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty} \equiv \bigvee_{\alpha=0}^{\infty} \mathrm{R}_{\varepsilon=\alpha}$, а может означать такое конечное значение точности, при котором неразличимость является полной (предельной) на данном множестве. Двойственным образом символ $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$ выражает тогда полную (предельную) различимость на том же множестве: $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0} \equiv \mathop{\&}_{\alpha=0}^{\infty} \mathrm{R}_{\varepsilon=\alpha}$.

Итак, пусть $\mathbf{R}^{+} = \{\alpha \mid 0 \le \alpha \le \infty\}$.

Пусть $\boldsymbol{R}_{\varepsilon}$ — это общее имя, фиксирующее тот факт, что речь идет о произвольном отношении неразличимости.

Рассмотрим множество $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{R}_{\varepsilon}\} \times \mathbf{R}^{+}$.

Пара $\langle \boldsymbol{R}_{\varepsilon}, \alpha \rangle$, где α принадлежит $\mathbf{R}^{+}$, есть тогда имя определённой неразличимости из $\boldsymbol{E}$.

По определению положим $\langle \boldsymbol{R}_{\varepsilon}, \alpha \rangle = \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$.

Обозначим через $\le$ порядок на $\boldsymbol{R}^{+}$, а через $\subseteq$ порядок на $\boldsymbol{E}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \subseteq \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \equiv \alpha \le \beta$.

Теперь ясна структура, к которой в принципе подводит нас схема (1). Все множество неразличимостей указанного ею вида изоморфно положительной вещественной полупрямой с решеточным порядком. Эта решетка дистрибутивна, а диагональная и полная неразличимости играют в ней роль универсальных границ. К решетке ε-неразличимостей как алгебре с операциями & и $\vee$ можно перейти обычным образом, полагая, что

$$\alpha \le \beta \text{ влечёт } \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \mathbin{\&} \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \equiv \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \vee \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \equiv \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta},$$

или определяя точную верхнюю грань для двух ε-неразличимостей как наибольший элемент этой пары, а точную нижнюю грань как её наименьший элемент.

Дальнейший ход — определить импликацию и отрицание $\neg \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \equiv \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$.

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \equiv \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}, \text{ если } \alpha \le \beta \text{, и } \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \text{ в противном случае.}$$

Хотя при этом сохраняется общая классическая (бинарная) оценка атомарных предикатов неразличимости, так определённая импликация не совпадает с классической, при которой истинность посылки не обеспечивает автоматически истинность заключения. Для импликации неразличимостей, напротив, проверка заключения (на истинность) необходима лишь тогда, когда заключением (консеквентом) импликации является более тонкая неразличимость, чем неразличимость посылки.

В качестве следствия данных выше определений мы получаем возможность интерпретировать логику ε-наразличимостей как ***модель псевдобулевой алгебры*** (***алгебры Гейтинга***) или, если множество допустимых значений ε конечно, как ***n-значную алгебру Гёделя***.

Таким образом, в решёточном смысле ситуация симметрична ситуации с абстракцией отождествления, логикой которой является решётка всех разбиений универсума. Но у абстракции неразличимости своя, сопряжённая с ней, логика — импликативная (скулемовская) структура с нулевым и единичным элементами. В этой структуре выполняются все теоремы интуиционистской пропозициональной логики (в том числе закон противоречия и неложность tertium non datur). Но она не является интуиционистской структурой, поскольку в ней выполняется также слабый закон исключённого третьего, аксиома линейности (аксиома Даммета), аксиомы Скотта и Янкова. Следовательно, логика неразличимостей — это одна из «космоса» промежуточных (между классической и интуиционистской) логик с минимальным отрицанием. В философском аспекте она любопытна, в частности, тем, что объясняет гносеологическое отношение двух абстракций неразличимостей — той, что приводит к логическому тождеству (диагональной неразличимости) и той, что порождает все метрические (эмпирические) равенства. При этом подтверждается, во-первых, что расстояние между логическим и любым эмпирическим равенством — это расстояние длиной в бесконечность и, во-вторых, что (и насколько) от выбора того или иного значения ε зависит картина изучаемого объекта.

Правда, не следует думать, что всякий раз чем меньше это значение, тем лучше. Многое зависит от данной задачи. К примеру, слишком большая точность может сделать бессмысленным сам факт измерения. Равным образом, требование большей точности может погубить исследование или затормозить его. Оптимальный выбор значения точности связан, по-видимому, с удовлетворением взаимно дополнительных требований: детализации предмета исследования и возможности его ассимиляции (познания). В первом случае, когда точность растёт, картина усложняется; во втором, — достигается её упрощение. Но об этом я уже говорил в первой части этой книги.

3.4. О доказательстве теорем в логике неразличимостей

Некоторые утверждения предыдущего параграфа могут показаться голословными, если не разъяснить особенности доказательства теорем в логике неразличимостей. Во-первых, все формулы этой логики имеют определённый «вес», представленный тем или иным значением точности различения. При этом только два значения — константы в прямом смысле. Остальные — это неопределённые постоянные. Веса «сопровождают» каждую атомарную формулу, имея равное с ней число вхождений. Число различных весов (значений) в сложной формуле равно числу различных атомарных формул. Сложную формулу считаем теоремой, если после вычисления при данных значениях элементарных (атомарных) формул согласно матрицам логических операций она принимает значение «∞». Таким образом, «∞» считаем выделенным значением (единицей решетки).

Докажем, что противоречие имплицирует (в смысле логики неразличимостей) произвольную неразличимость. Для этого достаточно показать, что конъюнкция $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \& \neg \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$ при произвольном значении α всегда принимает значение $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$.

Таблица 1

	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$	$\neg\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \& \neg\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$	$(\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \& \neg\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}) \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$
$0<\alpha<\infty$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$
$\alpha=0$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$
$\alpha=\infty$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$

Вообще, таблицы можно упрощать, указывая только значения весов, принимаемых формулой в соответствующей колонке. К примеру, докажем в таком варианте аксиому взаимной имплицируемости неразличимостей (так называемую аксиому Даммета):

Таблица 2

	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$	$(\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha})$	$(\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}) \vee (\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha})$
$\alpha<\beta$	∞	α	∞
$\alpha>\beta$	β	∞	∞
$\alpha=\beta$	∞	∞	∞

Во многих простых ситуациях построения таблицы не требуется. Общезначимость устанавливается элементарным разбором случаев. Таковы, например, интуиционистки общезначимые verum sequitur quodlibet и её минимальный аналог или закон противоречия. Но для формул, содержащих три и более различных значений точности, таблица является необходимым инструментом анализа, поскольку число граничных условий для этих значений и, соответственно, число вариантов разбора случаев быстро растёт. Так, чтобы убедиться в общезначимости формулы

$$(\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}) \supset ((\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\gamma}) \supset (\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset (\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \,\&\, \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\gamma}))),$$

требуется принять во внимание пятнадцать вариантов граничных условий для значений точности (и, соответственно, пятнадцать строк) вместо восьми обычных для классической таблицы истинности.

Я должен заметить здесь, что для проверки общезначимости в логике неразличимостей всех аксиом интуиционистской логики более сложных таблиц не потребуется, поскольку аксиомы последней содержат не более трёх различных пропозициональных параметров.

Ещё одно замечание кажется нелишним. Если допустить возможность только двух значений точности различения — полную различимость, когда $\alpha=0$, и полную неразличимость, когда $\alpha=\infty$, общезначимость tertium non datur становится доказуемой. Иными словами, в этом случае мы получаем булевскую решётку как частный случай непрерывной алгебры неразличимостей[19].

Докажем, однако, что в полной непрерывной логике неразличимостей tertium non datur не является теоремой. Доказательство даёт

Таблица 3

	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$	$\neg\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \vee \neg\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$
$0<\alpha<\infty$	α	0	α

Случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \infty$ я опустил, поскольку они (как я уже заметил выше) верифицируют tertium.

3.5. Трёхзначная логика неразличимостей

Теперь, для пользы дела, я позволю себе вернуться к содержанию параграфа 3.3., чтобы уточнить то, что ещё может показаться недостаточно ясным.

Выше рассматривался бесконечнозначный случай, когда множеством значений истинности служило вещественное пространство метрических неразличимостей, определённых через функцию расстояния:

$$x\boldsymbol{R}_\varepsilon y =_{\mathrm{df}} |x - y| \leq \varepsilon \qquad (5)$$

или (в теоретико-множественных терминах):

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon =_{\mathrm{df}} \{ <x, y> : |x - y| \leq \varepsilon \qquad (6)$$

где ε пробегает множество положительных вещественных чисел.

Эта непрерывная логика, я назову её $\mathbf{Nov}_1$, самым естественным образом представляет собой ещё одну модель из класса моделей псевдобулевых алгебр E(A), или общей алгебраической структуры, кото-

19 Это вполне естественный факт, если принять во внимание принцип соответствия.

рую (следуя Карри) назвают скулемовской импликативной структурой, а следуя Биркгофу, логикой Брауэра (точнее, структурой, ей двойственной), которая, как заметил Биркгоф, была развита, исходя «из метафизических соображений»[20].

Замечу, что и для меня логика неразличимостей имеет прежде всего метафизический интерес. В самом деле, для отношений эквивалентности, порождённых ***абстракцией отождествления***, формальное представление в виде определённой алгебро-логической структуры известно. Это решётка разбиений. Но для эмпирических неразличимостей, которые я связываю с ***абстракцией неразличимости***, аналогичной структуры не установлено. Поэтому вполне уместен вопрос о логике, ассоциированной с этой последней абстракцией.

Конечно, определённый ответ на этот вопрос в рамках теоретико-множественной методики даёт формальная теория отношений сходства[21]. Но в этой теории неразличимости изучаются только с их качественной стороны как частный случай отношений толерантности, то есть определяются парой аксиом — рефлексивностью и симметрией. Я же рассматриваю неразличимости в их метрическом аспекте. При этом основным является понятие меры неразличимости, а пространство неразличимостей определяется как метризуемое топологическое пространство. Для примера я использовал самый простой случай — вещественные числа с естественной топологией. Но и в этом случае требуются аксиомы, явно вводящее меру в логику. Неразличимости с мерой я обозначил общим именем $\boldsymbol{R}_\varepsilon$, где индекс указывает на метрический смысл отношения. Вопрос о базовых множествах, на которых заданы эти отношения, я не рассматриваю. С точки зрения данного анализа это множество вообще можно мыслить пустым. При этом в рассмотрение берутся только топологические свойства класса неразличимостей, естественным образом совпадающие с топологическими свойствами множества положительных вещественных чисел.

В виду абстрактной постановки вопроса, пороговые характеристики неразличимостей мыслятся как неопределённые постоянные. Я обозначаю их строчными буквами греческого алфавита. И поскольку основная идея — сравнивать неразличимости только по их поро-

---

[20] *Биркгоф Г.* Теория структур. М., 1952.

[21] *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М., 1971.

говым характеристикам, «по весам», равенство неразличимостей (в отличие от их теоретико-множественного) приобретает вид естественной эквивалентности:

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \equiv \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} =_{\mathrm{df}} \alpha=\beta,$$

либо

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \equiv \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \leq \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \;\&\; \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} \leq \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}.$$

Всё это выглядит, быть может, вполне тривиально. Кроме одного. С учётом свойств базисного отношения «≤», класс неразличимостей образует решётку, с которой естественно ассоциируется, как я уже отметил выше, некоторая алгебра с операциями & и $\vee$. Следовательно, мы получаем возможность двойной характеризации отношений неразличимости — как предикатов классической логики (с классической оценкой «истинно» - «ложно» в обычном теоретико-множественном смысле) и как элементов решётки. Соответственно, в дополнение к обычным операциям конъюнкции и дизъюнкции, которые определяются на неразличимостях как классических предикатах, возникает искушение определить на неразличимостях теоретико-решёточные операции & и $\vee$ со значениями истинности, соответствующими бесконечнозначной (непрерывной) логике. Чтобы эти определения выглядели убедительно, необходимы некоторые содержательные пояснения, уточняющие их согласованность с естественной семантикой отношений неразличимости.

Во-первых, все неразличимости естественно разделить на простые (они не содержат логических операций) и сложные (они образуются из простых обычным образом с помощью логических операций). Учитывая, что смысл логических операций должен выражать акт редукции сложных неразличимостей к простым (элементарным), чтобы сохранить нетривиальную топологию вещественного пространства, следует выбирать такие значения для логических операций, которые соответствуют смыслу самих неразличимостей. При этом анализ элементарных предикатов по значениям истинности ipso facto исключает некоторые логические возможности, характерные для классически независимых предикатов. Этот анализ должен включать указание на отношение пороговых значений (по их величине) для любых двух элементарных неразличимостей. Иначе говоря, ***мера неразличимости должна включаться в структуру законов и правил логики.***

В этом случае истинность конъюнкции двух неразличимостей естественно сводится к истинности более тонкой из них, ведь тогда вторая составляющая истинна a fortiori (более тонкая неразличимость имплицирует менее тонкую). Но вопрос о выборе значения для дизъюнкции выглядит не так, как в классическом случае. Если считать по-прежнему, что для истинности дизъюнкции достаточно истинности хотя бы одной из её составляющих, то выбор менее тонкой (в качестве значения) оправдывается прагматически — меньшая точность легче достижима. Иначе говоря, если задача в том, чтобы решить, по крайней мере, одну из проблем, выбираем для решения ту, которая легче.

Данное разъяснение вполне оправдывает семантический смысл таблиц для & и для $\vee$:

	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$ & $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$
$\alpha \leq \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$
$\alpha > \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$
	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \vee \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$
$\alpha \leq \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$
$\alpha > \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$

Но так как мы хотим получить не только решётку, но модель некоторой логики, то естественно ввести и определить на этой решётке импликацию. Это можно сделать либо аксиоматически посредством постулатов, как это сделано у Карри[22]:

P_1: $p \,\&\, (p \supset q) \leq q$ (аналог правила modus ponens)

P_2: $p \,\&\, s \leq q \Rightarrow s \leq (p \supset q)$,

либо таблично:

	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \mathrm{R}_{\varepsilon=\beta}$
$\alpha \leq \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$
$\alpha > \beta$	$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta}$

[22] *Карри Х.* Основания математической логики. М., 1969. С. 211.

Таблицы для &, $\vee$, $\supset$ в совокупности оправдывают законность постулатов P_1 и P_2 в нашей импликативной структуре. При этом верифицируется (с добавлением посылки $\alpha \le \beta$) аналог правила modus ponens, или одна из аксиом гейтинговской алгебры: $p \,\&\, (p \to q) = p \,\&\, q$.

Замечу, что значение $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$ во второй строке таблицы для импликации — это верхняя грань нашей решётки и её выделенный элемент (в других обозначениях: $\inf \bot = 1$). При табличной оценки формул логики неразличимостей формула считается общезначимой, если при любых значениях ε в её простых составляющих она принимает выделенное значение $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$.

Таким образом, семантически выбор табличных значений для импликации во второй строке мотивируется связью посылки и заключения по содержанию: истинность посылки (неразличимость при α) является фактическим основанием для истинности заключения (при значении, большем чем α, и подавно неразличимо) и в целом для всей импликации. Но если посылка ($\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$) ложна (при $\alpha>\beta$ имеет место различимость), то истинностное значение заключения зависит от выбора пороговой характеристики для заключения. Этим и определяется третья строка таблицы. Легко заметить, что таблица для импликации формально (с точностью до двойственного порядка) воспроизводит табличное определение импликации, данное К. Гёделем, в его известной статье «Zum intuitionistischen Aussagenkalkьl» (1932). Однако выбор нашей таблицы диктуется не формальной аналогией с брауэровской структурой (НВ-алгеброй), а собственной семантикой отношений, индуцированных абстракцией неразличимости.

Родственное можно сказать и об отрицании. Поскольку я рассматриваю неразличимости в (вообще говоря) бесконечном интервале $[\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}, \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}]$, очевидно, что решением равенства $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \,\&\, \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$ будет только $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$. Иными словами, $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$ является единственным общим псевдодополнением (&-дополнением) любого элемента нашей решётки. Оно определено однозначно и не зависит от выбора универсума и пороговых значений (диагональ имеет место при сравнениях на любом непустом базовом множестве). Поэтому отрицание вводится стандартным образом через импликацию: $\neg \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \equiv \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} \supset \boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$ (как редуктивное отрицание).

Тогда следующие соотношения будут выводимы:

$$\neg \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}, \text{ если } \alpha\neq 0;$$
$$\neg \boldsymbol{R}_{\varepsilon=0} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}.$$
$$\neg \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$$

Таким образом, согласно общепринятой терминологии, решётка неразличимостей — это структура с псевдодополнениями (алгебра с нулём), причём одно из них является выделенным. Понятием отрицания непрерывная логика неразличимостей отличается от непрерывной вероятностной логики с её обобщённым отрицанием: $\neg p = 0 + 1 - \varepsilon$.

Формально это не вызывает вопросов. Однако, если символ «$\neg$» имеет смысл отрицания, возникает вопрос относительно интерпретации двух последних соотношений в приведённой выше колонке: почему мы должны принимать отрицание логического тождества как признание полной неразличимости и наоборот? Ведь между ними существует промежуточная инстанция в виде некоторой эмпирической неразличимости.

Поставленный выше вопрос и порождает идею трёхзначной логики неразличимостей. При этом открываются по крайней мере два пути её построения.

Согласно первому, мы сохраняем смысл всех операций логики $\mathbf{Nov}_1$, но сокращаем число «участников» в этих операциях до трёх: это диагональная неразличимость $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$, которую естественно понимать как тождественную ложь об эмпирической неразличимости (в самом деле, в этом случае каждый элемент универсума неотличим только от самого себя — об эмпирической неразличимости здесь не может быть и речи); это $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=a}$, которую естественно рассматривать как обобщённый (гомоморфный) образ эмпирических неразличимостей с пороговой характеристикой, отличной от ∞ и 0; и, наконец, это $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\infty}$, которую я беру как тождественную истину о неразличимости всех элементов универсума. Участников полученной таким путём подрешётки я обозначаю (для краткости) соответственно цифрами 0, 1, 2. В результате мы получаем табличный вариант трёхзначной логики (я назову её $\mathbf{Nov}_2$), идентичный $\mathbf{G3}_3$ (так называемой трёхзначной логике Гейтинга).

Система $\mathbf{Nov}_2$ любопытна тем, что она представляет собой трёхзначный вариант промежуточной логики, которой является $\mathbf{Nov}_1$, сохраняя класс доказуемых в ней теорем, в то время как сама $\mathbf{Nov}_1$ (псевдобулева алгебра неразличимостей) непредставима посредством конечных матриц (приведённые выше матрицы — это фактически схемы матриц, аналогичные схемам аксиом). Одновременно этот результат указывает на то, что $\mathbf{G}_3$ не имеет прямой связи с интуиционизмом, то есть ни о какой трёхзначной интуиционистской логике не может быть и речи, хотя импликацию, характерную для $\mathbf{G}_3$, иногда называют интуиционистской[23].

Я не знаю, кто первый заговорил об этой связи. Из отечественных книг первой, видимо, была книга А.А.Зиновьева[24], в которой $\mathbf{G}_3$ представлялась как адекватная (по замыслу Гейтинга) семантика для брауэровской логики и была названа «системой Брауэра – Гейтинга». Эта же версия повторяется и в более солидной монографии[25]. Ничего, кроме путаницы, такое толкование $\mathbf{G}_3$ принести не может и даже вызывает недоумение, поскольку известно (и Гейтингу после работы Гливенко[26] было известно, конечно, тоже), что брауэровская логика не является трёхзначной. Но если трёхзначные матрицы для отрицания и импликации, характерные для $\mathbf{G}_3$, всё же появились в классической работе Гейтинга[27], то цель их была другая: доказательство невыводимости duplex negatio из аксиом подлинно интуиционистской логики, сформулированных Гейтингом в той же работе.

Замечу, что сохранение семантики приведённых выше таблиц непрерывной логики неразличимостей с перенесением её на трёхзначный случай, как раз и даёт возможность по-настоящему оценить логику, характерную для $\mathbf{G}_3$.

Теперь обратимся ко второму пути. Согласно этому пути, трёхзначная логика (алгебра) неразличимостей тоже строится как подрешётка (гомоморфный образ) рассмотренной выше непрерывной решётки ($\mathbf{Nov}_1$) в той её части, которая касается операций &, $\vee$ и $\supset$ с ограничением на трёхзначный случай при тех же значениях: $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=0}$ (0), $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha}$ (1), $\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\omega}$ (2). Таким образом, таблицы для названных операций совпадают с таблицами $\mathbf{G}_3$. Однако таблица для отрицания приводится в связь с тем смыслом, который соответствует нашим представлениям об отрицании утверждений (фактов) о неразличимости в ситуации трихотомии. При этом следующие эквивалентности кажутся очевидными:

---

[23] *Monteiro A.A.* Sur les algèbres de Heyting symétriques // Portugaliae Mathematica, vol. 39, Fasc. 14, 1980.

[24] *Зиновьев А.А.* Философские проблемы многозначной логики. М., 1960.

[25] Logika formalna. Zarys encyklopedyczny. Warszawa, 1987.

[26] *Гливенко В.И.* О логике Брауэра // Историко-математические исследования. 2 сер., вып. 5 (40). М., 2000.

[27] *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jg. 1930, B., 1930.

$$\neg R_{\varepsilon=0} \equiv R_{\varepsilon=\alpha} \vee R_{\varepsilon=\infty}$$
$$\neg R_{\varepsilon=\alpha} \equiv R_{\varepsilon=0} \vee R_{\varepsilon=\infty}$$
$$\neg R_{\varepsilon=\infty} \equiv R_{\varepsilon=0} \vee R_{\varepsilon=\alpha}$$

На основании этих эквивалентностей и в соответствии с табличной характеристикой дизъюнкции определим отрицание:

R_ε	$\neg R_\varepsilon$
0	2
1	2
2	1

Нетрудно заметить, что это отрицание имеет, по существу, положительный смысл. Логику с таким отрицанием, в которой табличные характеристики всех остальных операций (кроме отрицания) соответствуют их характеристикам в $\mathbf{G}_3$, я назову $\mathbf{Nov}_3$.

Список теорем этой логики содержит закон тождества, закон verum sequitur ad quodlibet, аксиому Гейтинга – Лукасевича, аксиому Янкова, оба закона де Моргана (следовательно, это решётка де Моргана). Но условию булевости $\mathbf{Nov}_3$ не удовлетворяет. Любопытно также, что в число теорем этой логики входит закон исключённого третьего (сильный и слабый), но не входит закон снятия двойного отрицания. Таким образом, $\mathbf{Nov}_3$ демонстрирует независимость этих двух законов в рамках принятой абстракции неразличимости.

3.6. О законах композиции неразличимостей

Выше я уже заметил, что логика неразличимостей примирила меня с мнением Анри Пуанкаре, что между опытом и теорией существует «точка разрыва», которую нельзя преодолеть иначе, как отказавшись от тавтологичного (в смысле классической логики) описания опыта. Для теории познания это не менее важный вывод, чем связь неразличимостей со структурой гейтинговской решётки.

Примечательно, однако, что у неразличимостей есть ещё и другая связь с алгеброй и вычислительной техникой. Уже на примерах предыдущих параграфов стало ясно, каким образом введение количественного параметра приводит к качественным изменениям в определении того, что следует понимать под полной теорией отношений. Иными словами, можно говорить о ***собственной алгебре неразличимостей с мерой***, отличной от чисто качественной теории неразличимости. Ниже я намерен усилить этот тезис анализом алгебраической структуры, включающей только одну операцию (внутренний закон), которую иногда называют композицией, иногда суперпозицией, а иногда де-моргановским произведением отношений.

Эта операция одна из древнейших. Но родилась она в повседневном общении, а не в математике, куда она попала только в конце 19-го в., когда окончательно была осознана важность теории отношений для логического анализа математических рассуждений. «Теоретическую жизнь» ей дали О. де-Морган и Г.Фреге в ходе исследований несиллогистических умозаключений[28].

Понятно, что определение композиции (как операции) связано с той или иной «языковой моделью» отношений. В частности, её можно определять в терминах логики предикатов, на языке графов или в терминах сечений[29]. Однако наиболее подходящим языком для целей этой работы послужил матричный язык, в котором композиция понимается как алгебраическая операция умножение матриц.

Это означает, что настало время вспомнить о том, что эмпирические неразличимости с самого начала были заявлены как классические предикаты с истинностной оценкой «истина – ложь», поэтому они самым естественным образом представимы посредством (0,1)-матриц.

Я предполагаю, что все неразличимости относятся к одному и тому же конечному полю объектов (обычный случай в инженерной практике). Следовательно, все представляющие их матрицы «соответствующие», а композиция неразличимостей коммутативна и ассоциативна.

Очень бы хотелось сразу сказать, что, по определению, мы таким образом имеем ***полугруппу***. Однако мы ещё не выяснили, что композиция неразличимостей является операцией в собственном смысле, то есть удовлетворяет условию замкнутости.

---

[28] Об одном полезном примере использования этой операции в обосновании несиллогистического умозаключения, восходящего к Аристотелю см.: *Кузнецов А.В., Новосёлов М.М.* Ограничение третьего понятия (косвенный силлогизм) // Философская энциклопедия. М., 1967. Т. 4.

[29] Сечением (или срезом) отношения ***R*** множеством ***A*** называют множество (класс) всех таких $x \in B$, каждый из которых находится в отношении ***R*** к некоторому элементу множества ***A***.

Исследование этого вопроса привело меня к необходимости разделить класс всех ε-неразличимостей на те, что принимают значения в множестве натуральных чисел (я называю их натуральными), и на те, значения которых берутся из области всей положительной вещественной полупрямой (я называю их вещественными).

Композиция замкнута на любом классе натуральных неразличимостей: композиция натуральных неразличимостей всегда натуральная неразличимость. Таким образом, класс натуральных неразличимостей образует коммутативную полугруппу, в которой нейтральным элементом является диагональ.

Это подтверждается следующим законом композиции:

$$R_{\varepsilon=\alpha} * R_{\varepsilon=\beta} = R_{\varepsilon=(\alpha+\beta)} \quad (7),$$ [30]

который показывает, что структура натуральных неразличимостей с операцией композиции (она представлена символом «*») вложима в структуру аддитивной коммутативной (абелевой) полугруппы множества натуральных чисел. Для этого достаточно положить

$$\varphi R_{\varepsilon=\alpha} = \alpha,$$

$$\varphi (R_{\varepsilon=\alpha} * R_{\varepsilon=\beta}) = \varphi R_{\varepsilon=\alpha} + \varphi R_{\varepsilon=\beta},$$

рассматривая «*» и «+» как однотипные операции.

В свою очередь, степень отношения неразличимости, принадлежащего данной полугруппе, определяется следующим образом:

$$R^{1}_{\varepsilon=\alpha} = R_{\varepsilon=\alpha},$$

$$R^{n+1}_{\varepsilon=(\alpha+(\alpha\cdot n))} = R^{n}_{\varepsilon=\alpha+\alpha(n-1)} * R_{\varepsilon=\alpha}.$$ [31]

---

[30] Я открыл этот закон не позднее 1982 г. См.: *Новосёлов М.М.* абстракция неразличимости и алгебра неразличимостей // Логические исследования. М., 1983.

[31] Из этого определения степени видно, в чём именно свойства введённой мной метрической неразличимости отличается от свойств нечеткого отношения. Ср.: Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М., 1986. С. 45.

Из этих соотношений нетрудно заключить, что рост степеней неразличимости делает различия объектов всё более незаметными, как бы «размывая универсум». Иначе говоря, композиция меняет характер метрической неразличимости: по мере накопления степеней они не поглощаются, а неразличимость становится всё более грубой, в пределе превращаясь в полную неразличимость (аморфную эквивалентность).

Такое изменение характера для композиции как отношения, вообще говоря, явление обычное. Но для отношений неразличимости это новая постановка вопроса, поскольку до сих пор все теоремы о свойствах неразличимостей основываются на принципе поглощения степеней, то есть исходят из того, что для любого отношения неразличимости всегда верна импликация $\forall n\ (\boldsymbol{R}^n \Rightarrow \boldsymbol{R})$. Однако, если мы отличаем метрические неразличимости от качественных и от отношений типа равенства, то, основываясь на открытых мной законах композиции, следует признать, что для метрических неразличимостей верна как раз обратная импликация $\forall n\ (\boldsymbol{R}_\varepsilon \Rightarrow \boldsymbol{R}_\varepsilon^{\,n})$[32].

Если мы рассматриваем только одну неразличимость с произвольным вещественным пороговым значением, то закон (7) полезно обобщить следующим образом:

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} * \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon\in[\alpha,\,2\alpha]} \qquad (8)$$

Этот закон даёт нам нижнюю и верхнюю границы интервала, в котором не исключена вероятность сохранения неразличимости, причём только верхняя граница обеспечивает нам эту сохранность с достоверностью. Следовательно, неотличимость ***a*** от ***c*** при пороговом значении α, если ***a*** неотличимо от ***b***, а ***b*** неотличимо от ***c*** при том же пороговом значении, характеризуется неопределённостью. Композиция, вообще говоря, является интервальной неразличимостью, хотя в принципе не исключено её совпадение с одной из её составляющих. Но если мы хотим гарантированно обеспечить неразличимость в актах последовательных парных сравнений, нам всякий раз при выполнении операции «следующий за» необходимо «менять лошадей».

---

[32] Это согласуется с общим правилом для нечётких отношений, согласно которому «свойство транзитивности нечёткого отношения зависит от способа определения произведения нечётких отношений» (*Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации. М., 1981. С. 50).

Замечу ещё, что композиция несовпадающих эквивалентностей является эквивалентностью, если выполняется их перестановочность[33]. Аналогичная теорема имеет место и для неразличимостей, когда они рассматриваются качественно (как частный случай отношений толерантности)[34].

Но с точки зрения изложенных здесь представлений (когда неразличимости характеризуются мерой) дело обстоит, вообще говоря, по-иному. В частности, неразличимости, отличные от натуральных, не замкнуты по этой операции, хотя их композиция по-прежнему коммутативна[35].

Это непосредственно следует из обобщённого закона композиции:

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon=\alpha} * \boldsymbol{R}_{\varepsilon=\beta} = \boldsymbol{R}_{\varepsilon\in[\max(\alpha,\beta),\,(\alpha+\beta)]}, \qquad (9).$$

Иначе говоря, композиция неразличимостей по сути не является операцией, если только не расширить область пороговых значений неразличимостей до множества вещественных интервалов и, таким образом, перейти от арифметики вещественных чисел к арифметике интервальных чисел[36]. Этот же закон показывает, что композиция неразличимостей, отличных от натуральных, всегда является ***интервальной неразличимостью***, а итерация сохраняет свойство интервальности.

3.7. О других подходах и прикладном значении эмпирических неразличимостей

Традиционные, и современные теории познания редко бывают озабочены каталогизацией таких абстракций, которые бы выражали не столько возможное de jure в сфере рационального мышления, сколько необходимое de facto в сфере эмпирического опыта. Между тем,

---

[33] *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М., 1970. С. 26.

[34] *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок. М., 1971. С. 91.

[35] В данном случае речь идёт о замкнутости с учётом возможных значений точности.

[36] Второй (обобщённый) закон композиции неразличимостей был открыт мной в те же годы, что и первый. О том, что такое интервальная арифметика см.: *Калмыков С.А., Шохин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. М., 1986.

именно связь процессов абстракции с условиями порождения или распознавания образов опыта, обработки и выбора данных опыта вводит многие философские понятия в тезаурус ключевых понятий информатики и эмпирического процесса познания вообще, придаёт им нетрадиционный логико-гносеологический смысл, погружая их в контекст неклассических логик. Так, в частности, обстоит дело и с традиционным принципом тождества неразличимых, когда понятие о неразличимости берётся в его прямом эмпирическом смысле, то есть без всяких идеализаций.

О моём отношении к этому принципу уже говорилось в первой части этой книги. Здесь (во второй части) в предыдущей и этой главе я уточнил высказанную ранее мысль о том, каким образом, при всей относительности разного рода отождествлений, этот принцип позволяет нам говорить о тождестве как о «логической постоянной».

Возможно, я первый связал с этим принципом эмпирическое содержание, поставив вопрос о законности обобщения этого принципа на эмпирические условия познания. До сих пор такая законность казалась легко оспоримой в силу известной размытости всех эмпирических понятий. Но положительное решение этого вопроса всё же есть, хотя оно, по-видимому, и невозможно без общего понятия об интервалах абстракции и независимой (от прочих) абстракции неразличимости.

Ввести такую абстракцию почему-то не позаботился никто, хотя давно было ясно, что «фундаментальным эмпирическом понятием является неразличимость»[37], а абстракция неразличимости является таким же фундаментальным её философским образом. Фундаментальным, во-первых, потому, что всё наше эмпирическое познание устроено так, что размытость (интервальность), присущая отношениям неразличимости, в принципе неустранима, а, во-вторых, потому, что этот неустранимый фактор познания является едва ли не повсеместным.

Первыми догадались об этом психологи и превратили свою догадку в совокупность альтернативных теорий[38]. Затем настал черёд логического эмпиризма обратить внимание на неразличимость. Р.Карнап (1928), идя, возможно, по стопам психологов и А.Пуанкаре, изучает логику этого отношения[39], с помощью которой он пытается

---

[37] *Рассел Б.* Исследование значения и истины. М., 1999. С. 115.

[38] См., к примеру: *Бардин К.В.* Проблема порогов чувствительности и психофизические методы. М., 1976.

[39] *Carnap R.* Der logische Aufbau der Welt. Hamburg, 1961.

«раскрыть логическую структуру («конституционную систему») процесса создания картины мира у отдельной познающей личности, исходящей из своих «непосредственных данных», то есть восприятий»[40]. Следующей по значимости была книга Н.Гудмена «Структура наглядности»[41], а затем многие и многие ещё касались этой проблемы.

Но я коротко остановлюсь только на двух работах, которые так или иначе адекватны идеям интервальной семантики, делая интервал основным субъектом исследования и решая в то же время сугубо прикладные задачи..

Одна появилась в тот же год, когда вышла книга Карнапа. Эта работа называется «Исчисление отрезков». Её автор — воронежский математик, позднее известный алгебраист, А.К.Сушкевич[42]. Эту его статью вполне можно считать первой работой по интервальной арифметике. В ней впервые формулируется идея интервальных вычислений и определяются операции над интервальными числами. Но косвенно она затрагивает и проблемы интервальной семантики, поскольку интервальные оценки непосредственно связаны с гносеологической точностью эмпирических понятий.

Правда, главная задача автора была как будто бы теоретическая — аксиоматическое представление теории приближённых вычислений. Однако идея «приближённости» фактически исчезает из рассмотрения, когда автор приходит к заключению, что «в использовании понятия «приближённого числа *x*» по существу нет никакой необходимости. При решении ряда практических задач само число *x* достаточно проблематично. Необходимо знать лишь положение и длину интервала... собственно приближённое значение есть ни что иное, как интервал»[43]. Иначе говоря, автор невольно пользуется абстракцией неразличимости точного и приближённого значений, но самой абстракции явно не вводит. Замечательно, что в теории Сушкевича точные значения представляют собой специальные (частные) случаи интервалов. Автор называет их «вырожденными» интервалами.

Ещё более интересными с точки зрения философии интервального анализа являются некоторые следствия этой теории. В частности, хотя в ней подтверждается обычный факт обратного отноше-

---

[40] *Финн В.К.* Карнап // Философская энциклопедия. Т. 2. М., 1962.

[41] *Goodman N.* The Structure of Appearance. Cambridge (Mass.), 1951.

[42] *Suschkewitsch A.* Über die Streckenrechnung // Математ. сб. М., 1928. Т. XXXY. вып. 3 и 4.

[43] *Suschkewitsch A.* Über die Streckenrechnung... С. 251.

ния между точностью и относительной длиной интервала, всё же доказывается, что увеличение длины интервала не безгранично. Напротив: «можно скорее всего установить верхнюю границу для относительной длины, а также проводить операции до тех пор, пока не будет достигнута эта верхняя граница»[44]. В этом мне видится как бы прообраз возникшего позднее понятия об интервальном расширении, которое (наряду с интервальной арифметикой) является основой, позволяющей «находить гарантированные границы, содержащие точные решения самых различных задач вычислительной математики»[45].

Теперь несколько слов о другой работе. Она принадлежит французскому методологу Жану Луи Детушу и представляет собой опыт применения логических операций над некоторым полем рациональных интервалов[46].

Автор этой работы (как и Сушкевич) исходит из очевидной необходимости «работать на интервалах», полученных по результатам измерений, полагая (как и Сушкевич), что понятие об истинном значении величины в этих случаях, вообще говоря, лишено операционального смысла. При этом он использует понятие меры множества для характеристики точной оценки величины, входящей в интервал, полученный по результатам измерения. В итоге возникает возможность рассматривать систему утверждений (высказываний) о принадлежности меры величины некоторому интервалу и определить логические операции на множестве этих утверждений, полагая, что:

$$p_1 \,\&\, p_2 =_d \; \text{Ré Mes } A \subseteq I_1 \cap I_2$$
$$p_1 \vee p_2 =_d \; \text{Ré Mes } A \subseteq I_1 \cup I_2$$
$$\neg p_1 =_d \; \text{Ré Mes } A \subseteq \complement I_1.$$

Автор замечает, что применение так определённых логических связок кнечное или счётно-бесконечное число раз даёт соответствующее поле множеств, которое будет борелевским, а эмпирическое суждение будет выразимо посредством теоретико-множественного включения Ré Mes $A \subseteq E$, где E — борелевское множество пространства R_A, ассоциированного с величиной А.

---

44 *Suschkewitsch A.* Über die Streckenrechnung... С. 258.

45 *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск, 1986. С.52.

46 *Destouches J.-L.* Tendances nouvelles dans l'expression des résultats de mesures // Revue philosophique. № 2. 1984.

В этой же работе автор рассматривает и другие варианты логики интервальных суждений, в частности в связи с понятием нечётких множеств.

Нетрудно догадаться, что я остановился на этих работах только потому, что они, с одной стороны, сравнительно близки к этой главе моей книги, а с другой — достаточно далеки от неё. Близки, поскольку речь идёт об интервальных представлениях, которые образуют их концептуальную основу; далеки, поскольку принцип подхода к логической системе в моей книге иной — исходя из тесного родства той или иной логики с соответствующей алгеброй, я выбираю алгебраический, а не теоретико-множественный способ представления суждений о неразличимости, рассматривая абстракцию неразличимости как обобщённый образ порождения всех таких суждений.

Хотя логика эмпирических неразличимостей не является сугубо прикладной теорией (для меня она существенна, прежде всего, в её гносеологическом аспекте), её близость к теории приближённых вычислений (численному анализу) может оказаться полезной в области технических приложений. В частности, вопрос о мере транзитивности можно поставить в связь с логической характеристикой отношений неразличимости в системе «допусков и посадок», с вопросами технических измерений, стандартизации и взаимозаменяемости деталей машин и механизмов. Не исключается её возможная связь с теорией экспертных оценок и принятием решений в условиях нечёткой информации. Может быть, следует принять во внимание и замечание Дж. Фон Неймана, что логика будущих автоматов должна быть такой, в которой учитывалась бы длина рассуждений и число логических операций, необходимых для тех или иных «автоматных» умозаключений[47]. Идея k-транзитивности отношений неразличимости естественно ассоциируется с понятием о реляционных банках данных, породивших проблему хранения отношений в памяти ЭВМ. По ряду причин транзитивные зависимости между атрибутами базы данных вызывают нежелательные побочные эффекты. Но попытки избавится от таких зависимостей в рамках одного отношения приводят обычно к потере семантики, к нарушению адекватности базы данных моделируемой ею предметной области. Именно родственное идее k-транзитивности специальное (интервальное) использование отношения аппроксимируемости в теории функциональных пространств (пространства Скотта) позволило говорить о непрерывности разрыв-

---

[47] *Нейман фон Дж.* Общая и логическая теория автоматов // *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? М., 1960.

ных в общепринятом смысле функций и построить соответствующую алгебру блок-схем программ[48]. Да и сам интервальный анализ, на который естественно выходит логика неразличимостей, служит, прежде всего, интересам технических применений, в частности, представлению чисел в памяти ЭВМ. Оценка снизу и оценка сверху выражают ***интервальную точность*** теории и, соответственно её ***интервальную истинность.*** В этом контексте интервал абстракции предстаёт как самостоятельный объект, объединяющий теоретическую и практическую значимость теории, и возникает важнейший для методологии вопрос о формировании интервалов неразличимости в науке и в других видах деятельности.

---

[48] См.: *Scott D.* Lattice theory, data types and semantics // Current Computer Science Symposia. Ed. R.Rustin, v. 2, 1971.

ГЛАВА 4. АБСТРАКЦИЯ МНОЖЕСТВА И ПАРАДОКС РАССЕЛА

Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество?
— Множество чего? — спросила Алиса.
— Ничего, — отвечала Соня. — Просто множество!

Льюис Кэрролл
«Алиса в стране чудес»

Проблема объяснения парадоксов по-прежнему открыта и по-прежнему важна.

Карри Х.
«Основания математической логики»

Не знаю, является ли до сих пор полезной задачей ««уточнение тех представлений, которые лежат в основе теории множеств»»[1]. Однако мои собственные размышления над этой задачей, которые я предлагаю ниже, относятся к концу 60-х гг., то есть к тому времени, когда эта задача ещё считалась важной. Эти мои размышления носят преимущественно философский характер и не слишком вторгаются в технику вопроса, за исключением формализации одного пункта в канторовском подходе к понятию множества, который до сих пор оставался неуточнённым. Идея этой формализации опирается на принципы философского платонизма. Этим я не хочу сказать, что сам разделяю платонистскую концепцию математики. Однако любая точка зрения нуждается в последовательном развитии.

4.1. Завязка драмы

Как известно, исследования в области оснований логики и математики, предпринятые в начале двадцатого века, возродили старинные («схоластические») дискуссии между сторонниками номинализ-

---

[1] *Ван Хао, Мак-Нотон Р.* Аксиоматические системы теории множеств. М., 1963. С. 10.

ма и платонизма по вопросу об онтологическом статусе ***универсалий***, с той, однако, разницей, что современные дискуссии приняли сугубо технический характер, расколов не только философов, но также логиков и математиков на два враждующих лагеря. Напротив, схоластические дискуссии по проблеме универсалий имели преимущественно теологический смысл и не затрагивали основ средневековой науки.

Решающим фактором возрождения темы универсалий с собственно научным содержанием и значением, с одной стороны, и традиционно философским — с другой, явилась, конечно, интуитивная (или, как ещё говорят, наивная) теория множеств, созданная преимущественно трудами Дедекинда и Кантора. Не секрет, что Кантор рассматривал множества как универсалии, в которых «воедино связаны множественность и многообразие единиц»[2]. Все важнейшие понятия математики (и, в частности, анализа) определялись в этой теории на основе одной-единственной универсалии — на основе понятия «множество», которая уже никак не определялась, а попросту вводилась (постулировалась) как философская сущность, давая естественный повод к тому, чтобы считать множество доматематическим понятием (Г.Вейль) или, во всяком случае, нематематическим.

Действительно, конечные совокупности объектов рассматривались в логике и до наивной теории множеств. Первым нарушил эту традицию, видимо, Б.Больцано. Но только Кантор придал понятию множества «надэмпирический статус», положив это понятие в его неограниченной абстрактной общности в основу математической теории. При этом логика невольно оказалась в зоне притяжения математического анализа.

Разумеется, это не было делом произвола. Потребность в новых представлениях возникла как реакция на кризис идеи бесконечности, точнее на необходимость дать логически строгую теорию непрерывных функций и преодолеть кризис идеи бесконечности, вызванный обоснованием математического анализа на «динамическом» (как бы протекающем во времени) понятии предельного перехода (Коши, Абель, Вейерштрасс). Одним из симптомов этого кризиса было открытие непрерывных функций, не имеющих производных ни о одной точке (Вейерштрасс).

С этой целью и создаётся теория абстрактных множеств — математическая наука, в которой понятие множества используется во всей его интуитивной общности. При этом формируются два основных её

---

[2] *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М., 1985. С. 270.

раздела: теория конечных множеств (комбинаторика), доставшаяся на долю уже реформированной логике (булевой алгебре) и теория бесконечных множеств (учение о трансфинитном). В дальнейшем на базе этой теории развиваются топология, теория категорий, абстрактная алгебра (теория структур), теория функций и функционального анализа.

И всё же, не смотря на эти успехи, как я уже отметил выше, почти всем математикам было ясно, что множество не является математическим понятием, что это скорее философская категория. Это, конечно, понимал и сам Кантор. Но поскольку его исследования шли только в русле «числовых множеств» (как финитных, так и трансфинитных), вопрос о неограниченной интуитивной общности этого понятия до поры до времени не ставился, хотя абстракция актуальной бесконечности сомнению, действительно, подвергалась.

В этой ситуации первым свидетельством неблагополучия в области «интуитивной общности» таких понятий, как множество (совокупность, класс) и одновременно самой классической логики, которой пользовался Кантор в своих доказательствах, стал ***парадокс Рассела***. Принято считать, что «Бертран Рассел построил противоречие, оставаясь исключительно в рамках элементарной логики»[3].

Видимо, так считал и сам Рассел, о чём свидетельствует его ранняя полемическая статья в защиту логистики[4] от тогда уже острых, если не сказать ядовитых (после появления ряда парадоксов) высказываний Пуанкаре. Не случайно расселовский парадокс был поначалу истолкован в терминах логики и адресован не канторовской теории, которая к тому времени была хорошо известна и пользовалась признанием, а логике Фреге, которую в математических кругах знали гораздо меньше. Это подтверждает и письмо Рассела, адресованное именно Фреге:

«*Дорогой коллега*, уже полтора года назад я познакомился с вашими «Основными законами арифметики», но только сейчас я сумел найти время, чтобы изучить Вашу работу тщательно, как я всё время намеревался это сделать. Я обнаружил, что согласен с Вами во всём главном, в частности в том, что Вы отвергаете все психологические моменты в логике, и в Вашей высокой оценке идеографии в

---

[3] *Нагель Э., Ньюмен Д.* Теорема Гёделя. М., 1970. С. 7.

[4] *Russell B.* Les paradoxes de la logique // Revue de Métaphysique et de Morale. T. XIV, mai, 1906.

основаниях математики, которые сейчас трудно отделить от формальной логики. В связи со многими частными вопросами я нашёл в Вашей книге множество рассуждений, тонких исследований и определений, которые тщетно было бы искать в сочинениях других логиков. В вопросах, касающихся функций, я самостоятельно пришёл к взглядам, совпадающим с Вашими даже в деталях. Имеется только один пункт, в котором я встретился с трудностью. Вы утверждаете, что функция не нуждается в прямом определении. Я тоже раньше так думал, но сейчас такая точка зрения кажется мне сомнительной из-за следующего противоречия. Пусть *w* есть предикат «быть предикатом, который не относится к самому себе». Относится ли этот предикат к самому себе? Из любого ответа на этот вопрос вытекает противоположный ответ. Поэтому мы можем заключить, что *w* не есть предикат. Точно так же, не существует такого множества (рассматриваемого как целое), элементами которого являются множества, не содержащие самих себя. Отсюда я заключаю, что при определённых условиях понятию множества не соответствует ничего такого, что может рассматриваться как объект»[5].

Чуть позже Рассел пояснит задачу своей теории, которая сложилась под влиянием открытого им парадокса. Эта теория, скажет Рассел, претендует единственно на то, чтобы исследовать принципы, употребляемые в обычной математике. Её целью является, во-первых, открыть эти принципы, во-вторых, показать, что обычная математика вытекает из этих принципов дедуктивным путём, а также, в-третьих, извлечь отсюда все иные следствия, которые могут представлять интерес. В этом третьем пункте логистика как раз и входит в соприкосновение с канторовской теорией множеств и с парадоксами (противоречиями) этой теории[6].

Не знаю кто, но расселовскую программу по решению этой задачи назвали затем логицизмом — философским направлением в основаниях математики, отвергающим кантовский тезис о синтетическом характере математических истин и рассматривающим математику как чисто аналитическую науку, все понятия которой можно

---

5 Но может рассматриваться, вообще говоря, как «пустой объект». Письмо Рассела цитирую по кн.: *Бирюков Б.В., Тростников В.Н.* Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. М., 1977. С. 102-103.

6 *Russell B.* Les paradoxes de la logique. P. 632.

определить в терминах дедуктивной логики[7]. Философию, соответствующую этой методологической программе, сам Рассел назвал ***аналитическим реализмом.***

4.2. О понятии «множество»

Думаю, без объяснений понятно, что последнее предложение приведённого выше расселовского письма поднимает тему универсалий. И это обстоятельство даёт мне некоторое право вернуться к философскому смыслу понятия «множество», пусть даже рискуя запутаться «в не имеющих прямого отношения к делу эпистемологических и метафизических рассуждениях»[8]. Но если, как говорит Фреге, «основательное исследование понятия числа всегда должно проходить несколько философски»[9], то почему же исследование понятия, которое, как выяснилось теперь, лежит в основе понятия числа, должно игнорировать философский подход?

Не секрет, что с первых опытов аксиоматизации канторовской теории смысл понятия множества тесно связали с ***принципом свёртывания*** (или, иначе, — с аксиомой свёртывания), который предполагает:

– во-первых, — наличие «множественности» каких-либо объектов, с одной стороны, и «множества» их — с другой;

– во-вторых, — наличие некоторых характеристических свойств, которые бы выделяли объекты множественности;

– в третьих, — возможность мыслить (представить) множественность как множество, то есть как некую онтологически самостоятельную сущность, элементы которой «срастаются... в органическое единое целое»[10], и которая поэтому уже сама может быть элементом какой-либо множественности или множества. Этот последний акт преобразования множественности в множество называют «свёрты-

---

[7] С краткой характеристикой логицизма можно ознакомится по ст.: *Яновская С.А.* Логицизм // Философская энциклопедия. Т. 3. М., 1964; *Чёрч А.* Математика и логика // Математическая логика и её применения. М., 1965; *Карри Х.* Основания математической логики. М., 1969.

[8] *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М., 1966. С. 24.

[9] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. Томск, 2000. С. 19.

[10] *Кантор Г.* Труды... С. 269.

ванием». Принято считать, что именно ***акт свёртывания*** даёт основу для появления парадоксов теории множеств, одним из которых (возможно самым ярким) является парадокс Рассела (1902).

Это обстоятельство заметил, прежде всего, сам Рассел, предложив для этих *insolubilia* сразу три варианта решения, одним из которых была no classes theory. Она предполагала исключение классов (множеств) как полноправных сущностей из возможных значений предметных переменных пропозициональных функций. Следствием такого подхода непосредственно оказывался философский номинализм.

Посмотрим на эту философскую тему подробнее.

Принцип свёртывания подразумевает в сущности два различных подхода к понятию множества — ***интенсиональный***, когда множество задаётся характеристическим (общим) свойством (признаком) элементов множественности, и ***экстенсиональный***, когда множество характеризуется списочным составом его элементов. Эти два различных подхода обычно определяют как ***платонистский*** в первом случае, и ***номиналистский*** во втором, хотя в обоих случаях подразумевается акт свёртывания элементов множественности в множество как некую «единую вещь саму по себе»[11].

Такое распределение философских ярлыков связано, возможно, с тем, что экстенсиональнвй аспект операции свёртывания уточняется ещё одним принципом теории — ***принципом объёмности*** (экстенсиональности), который обращает наше внимание на множество не столько в качестве «единого», сколько в качестве «многого», то есть на элементы множества.

Этот принцип подразумевался и в наивной теории. Кантор не скрывал, что его абстракция множества должна исключать всякую размытость (неопределённость) количественного состава за счёт постулата об априорной строгой пространственной точечности элементов множества[12]. Иначе говоря, множество должно быть «прозрачным понятием» в некотором трансцендентном смысле, вытекающим из онтологической однозначности элементов множества, допускающей их индивидуацию. Причём индивидуация мыслилась именно онтологической, основанной на сильном варианте принципа исключённого третьего, а не гносеологической, основанной исклю-

---

[11] *Кантор Г.* Труды... С. 269.

[12] Там же. С. 265.

чительно на эффективных процедурах распознавания (узнавания) элементов множества посредством верификации значений некоторой пропозициональной функции $P(x)$[13].

Принимая во внимание принцип объёмности, резонно предположить, что не интенсиональная характеристика множества придаёт принципу свёртывания платонистскую окраску, а именно экстенсиональная, — самый акт перехода от интуитивно ясного эмпирического факта множественности вещей, как набора значений функции $P(x)$, к множеству как единой вещи, которая уже ни в каком смысле не является эмпирическим фактом и потому (вопреки весьма распространённому мнению) не может быть проиллюстрирована на примере. Как отмечает И.И.Жегалкин, «переход от множественности вещей к множеству их даёт нам пример творческой способности нашей *создавать* (курсив мой — *М.Н.*) вещи»[14].

В случае интенсиональной трактовки мы вправе говорить о множестве как об общем понятии, не выходя за рамки номинализма. Здесь слово «все» имеет дистрибутивный смысл и равносильно слову «каждый». В случае экстенсиональной трактовки о понятии множества говорится уже в собирательном смысле. Здесь множественность характеризуется как целое. В этом случае термин, определяющий множество, представляется как термин, определяющий единичную вещь. Так, когда мы характеризуем множественность деревьев понятием «лес», свойства последнего уже не относятся к отдельным деревьям, составляющим лес. И только такое собирательное толкование, думается мне, аутентично платонизму[15].

Известно, что платонистский подход не устраивал Рассела. В неограниченном умножении сущностей, подобных платонистским классам, он видел источник противоречий. «Тезис теории не-классов, — говорит он, — состоит в том, что всякое значащее предложение, касающееся классов, можно рассматривать как предложение, относящееся ко всем или некоторым их элементам, то есть к терминам, которые удовлетворяют некой пропозициональной функции φx (и, следовательно, не в собирательном смысле — *М.Н.*). Я обнаружил, что

---

[13] Об этом подробнее см. *Новосёлов М.М.* Логика абстракций. Ч. 1. М., 2000. Гл. 4.

[14] *Жегалкин И.И.* Трансфинитные числа. М., 1903. С. 3.

[15] Другое мнение представлено Э.Бетом в его книге «L'existence en mathématiques». Однако в этой связи я обращаю внимание на ст.: *Dumitriu A.* Les condition de la définition // International logic revue, Bologna, 1970. № 1.

единственными предложениями, относящимися к классам, которые не могут рассматриваться таким образом, являются предложения типа тех, что порождают противоречия»[16].

Это сказано в далёком 1906-ом. Но с тех пор, как известно, всякий раз, когда речь заходит о теории множеств (классов), нас преследует «чувство беспокойства относительно зависимости чистой логики и математики от онтологии платонизма»[17].

Посмотрим, однако, на эту проблему со стороны настоящих платоников. Чтобы не быть голословным, я приведу три коротенькие цитаты из Прокла: «всякое множество тем или иным способом причастно единому», «необходимо, чтобы нечто объединённое отличалось от единого» и «ничто в отдельности из многого не есть... само множество, и, наоборот, множество не есть каждое в отдельности»[18].

Это средневековая и чисто платонистская версия отношения двух сущностей — многого и единого, чем бы эти сущности ни были в глазах средневековых авторов. Её должен был защищать и Кантор, если бы он обсуждал парадоксы. Но он не вступал в дискуссию (1906-1912), которая шла в основном между Расселом, Кутюра, Цермело и Пеано, с одной стороны, и Пуанкаре, с другой. За Кантора это сделал Жегалкин, выставив условие: никакое «множество не есть элемент самого себя»[19].

Подход И.И.Жегалкина не совпадает с no classes theory'ей Рассела. Там классы исключаются вовсе как сущности. Там подход номиналистский. А здесь речь идёт, если можно так выразиться, только о «собственном членстве» для множеств. Это подход платонистский, но с ограничением, которое, на мой взгляд, если и не мягче, чем то, на которое пошёл Рассел, создавая двумя годами позднее свою теорию типов (the Theory of Types), однако более естественно в экстенсиональном контексте.

Тем не менее, аргументов против этой платонистской аксиомы всегда было предостаточно. Во всяком случае, её противники утверждают, что некоторые множества «естественно без колебаний считать собственными элементами»[20] или «никто не может запретить нам рассматривать и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов»[21].

---

[16] *Russell B.* Les paradoxes de la logique... P. 636.
[17] *Beth E.W.* The foundations of mathematics. Amst., 1959. P. 471.
[18] *Прокл.* Первоосновы теологии. Тбилиси, 1972. С. 29 и 31.
[19] *Жегалкин И.И.* Трансфинитные числа Е С. 5.
[20] *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств... С. 16.
[21] *Виленкин Н.Я.* Рассказы о множествах. М., 1965. С. 24.

Разумеется, никто и не собирается что-либо запрещать. Но если тут дело свободного выбора, то полезно этот выбор обсудить. Во всяком случае теория «двойственной истины» (или двойной подход), когда для одних можно, а для других нельзя, отдаёт синкретизмом.

Мне лично цитаты из Прокла говорят о том, что тема универсалий общей теории множеств в её аксиоматическом виде ещё не имеет логического завершения. С чисто платонистской точки зрения Жегалкин прав, убирая квантор «некоторые» и оставляя только квантор «все».

Согласно последовательному платонизму, множество и элемент множества не могут быть тождественны, если их рассматривать как реалии «в себе». Иначе говоря, множество, как множество, и множество, как его элемент, — это две различные вещи, и всякое рассуждение о них, как об одной и той же вещи, является нарушением закона тождества, хотя это и не вытекает из определения самого расселовского класса, отчего и возникает внутренняя противоречивость этого понятия.

При этом я не обсуждаю здесь вопрос о том, хорошие или плохие сами по себе свойства ***самоприменимости*** или ***несамопроименимости***. Сами по себе они ничуть не хуже других свойств. И повинны в парадоксах не эти свойства, а объекты, к которым мы решаемся их применять. К примеру, в теории алгорифмов свойство «быть самоприменимым» вполне хорошее свойство и никто не скажет, что самоприменимость в этой теории чревата парадоксами. Но в теории алгорифмов речь идёт о конструктивных объектах, то есть об объектах конечно и исчерпывающим образом определимых — о записях в некотором алфавите. И хотя рассуждения об этих объектах могут порой напоминать рассуждения, сходные с теми, что приводят к парадоксу Рассела, противоречия здесь только кажущиеся, поскольку они всегда разрешимы путём отказа от необоснованных допущений[22].

Напротив, в теоретико-множественной математике о какой-либо конструктивности объектов в общем случае не может быть и речи. Не случайно на теоретико-множественной почве допустимо сосуществование, как номиналистов, так и платоников. А их споры не могут привести к однозначному и конструктивному решению.

---

[22] Подробнее см.: *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов. М., 1984. Гл. 6.

В частности, парадокс Рассела имеет смысл как парадокс для номиналиста, но не для платоника. Для последнего расселовский класс не поддаётся экстенсиональному (и в этом смысле финитному) заданию, например списком (пусть даже и бесконечным). Он может быть задан только интенсионально.

В письме к Фреге Рассел допускает обычную для классики абстракцию отождествления свойства (признака) и класса (множества). Но если понятие свойства явно представлено ясным логическим понятием пропозициональной функции, то общее понятие множества явно представлено только ***абстрактной идеей единства***[23]. Однако этого мало для осмысленных суждений (утверждений) о множествах. К примеру, реализуемость заявления о том, что для «произвольного данного множества представляется вполне осмысленным выяснить, является оно своим собственным элементом или нет»[24], весьма зависит от того, какими средствами мы располагаем для такого выяснения.

В самом деле, как бы мы могли это выяснить для «произвольного множества», если бы руководствовались не описательной его характеристикой (что почти равносильно акту наивной веры в лингвистическую реальность), а только аксиомой экстенсиональности с её естественным требованием соблюдения (выполнения) принципа индивидуации, то есть по существу соблюдения условия финитности? А это, замечу, главное требование прозрачности множества. Любопытно, что посредством описательной характеристики (свойством) не всегда можно явно представить даже конечное множество[25].

В предыдущей главе речь была об ультраинтуиционистской идее кажущихся противоречий. Я думаю, что интенсиональный подход к парадоксу Рассела даёт нам наглядный пример кажущегося противоречия, поскольку я не убеждён, что класс, определённый (свойством) в начале рассуждения, приводящего к парадоксу, можно отождествить с классом, полученным в результате этого рассуждения, хотя их лингвистические описания совпадают. Собственно, парадокс состоит в

---

23 «Самое существенное в понятии множества — это акт объединения различных предметов в *одно целое*» (*Лузин Н.Н.* Теория функций действительного переменного. М., 1948. С. 8).

24 *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств... С. 16.

25 Об этом см.: *Нагорный Н.М.* Монолитно ли понятие конечного множества (По поводу одной утраченной работы А.А.Маркова) // Смирновские чтения. 3-я междунар. конф. М., 2001.

противоречивости описаний. Но я просто не готов согласиться с тем (общепринятым мнением), что формальная эквивалентность описаний влечёт тождество их значений.

Кроме того, я не понимаю, каким образом «множество всех множеств» можно полагать «данным множеством». А ведь это, едва ли не главный аргумент тех, кто готов «без колебаний» допускать множества, которые могут быть своими собственными элементами.

4.3. Абстракция множества и закон тождества

Высказанные выше мои соображения пока касались только негативного аспекта проблемы. Как известно, позитивный аспект состоит в том, чтобы сформулировать определённые ограничения на способы задания объёмов множеств, которые, по мысли Кантора, сами по себе совершенно неопределённы, если не определён их количественный состав.

Для уточнения объёмов обычно используют всякого рода ограничения интенсионального характера, связанные с аксиомой свёртывания. Однако, принимая во внимание круг философских идей Кантора, я убеждён, что любое толкование терминов «множество» и «элемент множества» необходимо привести в соответствие с принципом тождества. Жегалкинская аксиома $\neg(x \in x)$ относится, вообще говоря, не к идее членства самой по себе, как она определяется в элементарной логике, а только к характеру самих множеств. Но канторовская концепция множества требует, на мой взгляд, отличать множество от любого из его элементов в силу индивидуации сущностей. Поэтому на самом деле исходным принципом должен быть принцип тождества, а не аксиома Жегалкина. Решая вопрос о том, является ли некоторое произвольное множество элементом самого себя, необходимо принять следующее условие (во всех нижеследующих формулах значениями переменных являются множества):

$$x \in x \supset \neg x = x.$$

Если мы не сомневаемся в законе тождества, то по контрапозиции естественно заключаем, что $\neg x \in x$, или, обобщая по переменной,

$$\forall x \neg (x \in x).$$

Это формальный аналог аксиомы Жегалкина. Поскольку эта аксиома нам ничего не говорит о связи «членства» и отношения тождества, я перехожу к более общему случаю, добавляя к характеристике понятия множества аксиому, которую я называю ***элемент-аксиомой***:

$$\forall x \forall y\,(x \in y \supset \neg\, x = y),$$

Выполнимость этой аксиомы экспериментально очевидна для всякого конечного множества. А её перенос на случай бесконечных множеств вполне согласуется с общей интенцией Кантора применять к бесконечным объектам принципы, справедливые в конечном. В свете элемент-аксиомы я и оцениваю утверждения, вроде цитированного выше: «никто не может запретить нам рассматривать и такие множества, которые содержат себя в качестве одного из своих элементов». Да, никто, кроме принципа тождества.

Из элемент-аксиомы мы легко получаем аксиому (теорему) Жегалкина.

Замечу, что аксиома Жегалкина говорит нам о том, что расселовский класс по существу является универсальным классом, так как

$$\forall x \neg\,(x \in x) \equiv \mu x \neg\,(x \in x) = 1,$$

где μ — оператор абстракции (класса). И это кажется абсолютно естественным, если принять во внимание элемент-аксиому. С точки зрения теологии Прокла это означает, что только расселовский класс является подлинным ***единым***, тогда как все остальные множества ***причастны*** ему.

Известно, что формальный аналог парадокса Рассела получается подстановкой из контекстуального определения (аксиомы свёртывания в «идеальном исчислении» Гермеса — Шольца):

$$\forall y\,(y \in \mu x\, F(x) \equiv F(y)).$$

Это определение считается непредикативным, если на подстановку не накладывается никаких ограничений. Однако элемент-аксиома, указывая на то, что понятие «быть собственным элементом» противоречит закону тождества, подсказывает естественное ограничение на подстановку. Иначе говоря, значением предметных переменных в аксиоме свёртывания могут быть любые множества, кроме универсального класса (точнее всех классов расселовского типа). Такой подход согласуется с замечанием Жегалкина, что «для всякого данного, рассматриваемого множества всегда можно указать на одну вещь, которая заведомо не его элемент. Эта вещь — само рассматриваемое множество»[26]. Понятно, что этот подход отличается от New foundations («Новых основ») Куайна, где универсальный класс является элементом самого себя[27].

Коль скоро речь идёт об идее ограничений, изложенная выше постановка вопроса, конечно, не нова. В любых аксиоматических системах теории множеств вводят те или иные ограничения, запрещающие подстановку расселовского класса вместо предметных переменных в аксиоме свёртывания. Но почему-то никто не обращал внимание на два обстоятельства — во-первых, на возможность мыслить расселовский класс как универсальный класс, и, во-вторых, на связь расселовского парадокса с принципом тождества. А ведь именно здесь весьма актуальной представляется мне полемика Лейбница и Кларка по вопросу о принципе тождества неразличимых. Парадокс Рассела вполне согласуется с системой взглядов Кларка, но он несовместим с законом Лейбница. Странно, что Рассел, столь хорошо знакомый с логикой и философией Лейбница, прошел мимо этого факта.

Кроме того, стоит заметить, что имеется принципиальная разница между понятием множества в его канторовском (или платонистском) смысле, который уточняется элемент-аксиомой, и весьма распространённым толкованием этого понятия в учебниках и монографиях по теории множеств, которые или мало, или вовсе не интересуются философским аспектом канторовского подхода к своей теории. Они довольствуются ссылками на интуицию и мнимой возможностью познакомить читателя с понятием множества «на примерах». Более серьёзные и философствующие авторы (такие, как Борель или Лузин) всегда подчёркивали, что никакие примеры не могут дать идею этого понятия.

Упрощённый взгляд, путающий «множественность» и «множество» (что, между прочим, никогда не позволял себе Рассел), элиминирует предмет разногласий между номинализмом и платонизмом.

---

[26] *Жегалкин И.И.* Трансфинитные числа... С. 4.

[27] Попутно замечу, что в ML Куайна «не-класс» (индивид y) определяется формулой $\forall x\ (x \in y \equiv x = y)$.

Номиналисты не отрицают объективного существования множественности вещей и даже допускают теоретическую правомерность абстракции множества, как своего рода способ выражения (façon de parler). Но «свёртывание» множественности в единичную и единственную по своей природе сущность — в универсалию номиналисты не признают.

Для самого Рассела такой взгляд стал следствием открытого им парадокса. «Парадокс, касающийся класса классов, которые не являются элементами самих себя разрешается, если мы допустим, что класс всегда должен определяться некоторой пропозициональной функцией»[28]. В результате он пришёл (почти параллельно с теоретико-типовой) к no classes theory[29], о которой уже шла речь и согласно которой ««символы, означающие классы, — это просто условные знаки, которые не представляют предметы, называемые «классами», так что на самом деле, классы подобны описаниям, они являются логическими функциями, или, как мы также говорим, «неполными символами»»[30]. И, сравнивая no classes theory с теорией типов, он добавляет: «Единственно тем, что заставило меня тогда сохранить классы, была техническая трудность — представить без них предложения элементарной арифметики, трудность, которая мне тогда казалась непреодолимой»[31].

Но если отбросить классы как сущности (субстанции), о чём же тогда речь в его парадоксе?

На сказанное выше резонно возразить, что представленная концепция, способствуя частному (одному из возможных) решению парадокса Рассела, не решает, вообще говоря, главный вопрос — вопрос о непротиворечивости аксиоматической теории множеств. Это возражение, конечно, справедливо. Как отметил Пауль Бернайс, одним требованием устранить парадоксы, ещё не поставлена какая-либо удовлетворительная программа.

Однако автор и не ставит себе такой задачи. Его целью является сугубо философская проблема аутентичного толкования основного понятия теории множеств с точки зрения философии математического платонизма и, в связи с этим, возможного изменения интуитивной модели для системы Цермело.

---

[28] *Russell B.* La théorie des types logiques // Revue de Métaphysique et de Morale.T. XVIII. № 3. 1910. P. 268.

[29] См.: *Russell B.* Principles of Mathematics. L., 1903.

[30] *Russell B.*, Wstep do filozofii matematyki. Warszawa, 1958. S. 266.

[31] *Russell B.* Les paradoxes de la logique... P. 629.

Напомню известное замечание Фреге по поводу проблемы оснований: «Когда понятие, которое лежит в основе обширной науки, преподносит затруднения, неотложная цель, пожалуй, всё-таки состоит в его более тщательном исследовании и преодолении этих затруднений»[32] и вполне конкретное замечание С.А.Яновской о том, что попытки «решения» парадоксов относятся «к числу философских проблем, имеющих непосредственное отношение к выбору системы аксиом для аксиоматического построения теории множеств, то есть для логического обоснования этой науки»[33].

Элемент-аксиома — это одна их тех аксиом, которые отсутствуют в составе известных аксиоматических теорий. Это, конечно, жёсткая аксиома. Но она вполне естественна с точки зрения принципа объёмности: если мы утверждаем, что класс полностью определён своими членами, этот класс не может совпадать ни с одним из своих членов. В противном случае мы имели бы обычный порочный круг в виде пресловутой непредикативности[34].

Но, оставаясь на принципах интенсионально толкуемой аксиомы свёртывания, трудно избежать непредикативных определений, поскольку интенсиональная форма выражения (представления объекта) маскирует порочный круг. К примеру, в первом (пропозициональном) определении расселовского класса (из приведённого выше письма к Фреге) непредикативный характер этого определения явно не просматривается.

В то же время кажется, что хотя смысл аксиомы объёмности подсказывает необходимые уточнения, эти уточнения опять-таки явно не просматриваются из самой аксиомы, если не придать ей аутентично платонистскую интерпретацию. А такая интерпретация вовсе не обязательна, когда «множество» понимается номиналистически как «множественность». Вот почему я считаю необходимым дополнить аксиому объёмности элемент-аксиомой, принимая её чисто формально, независимо от того, какую философскую точку зрения мы при этом выбираем.

---

32 *Фреге Г.* Основоположения арифметики... С.17.

33 *Яновская С.А.* О философских вопросах математической логики // Проблемы логики. М., 1963. С. 10.

34 О том, что такое «непредикативное определение» см. одноимённую ст. Есенина-Вольпина в Философской энциклопедии. Т. 4. М., 1967.

4.4. О классификации парадоксов

По традиции, идущей от Рамсея (1926), принято делить парадоксы на логические и семантические. Этой традиции следует и «Новая философская энциклопедия»[35]. Против этого нечего возразить, если термин «логический» толковать достаточно широко, «не формулируя никакого точного критерия для решения вопроса, является ли какая-либо данная система «логической»», а попросту удовлетворяясь тем, что эта система «хоть как-нибудь связана «с анализом мышления»»[36].

Однако не менее традиционно считать, что парадоксы — это признак неблагополучия в основных (исходных) посылках (аксиомах, постулатах, абстракциях и пр.) той или иной системы, в которой парадоксы обнаруживаются. Если под логикой понимать ***чистое исчисление*** высказываний или предикатов (первого порядка), то мы не сумеем обнаружить в них ничего парадоксального. Непротиворечивость этих систем доказана.

Поэтому утверждение, что Рассел «построил противоречие, оставаясь исключительно в рамках элементарной логики»[37], нуждается, конечно в разъяснении. А разъяснение приводит нас к тому, что речь идёт в действительности о ***прикладной логике***, какой является, к примеру, теоретико-множественная логика. Только в прикладной логике мы находим индивидуальные предикаты (помимо тождества) и то, что можно назвать ***гипотезами*** или ***предпосылками***, которые придают доказательствам относительный (условный) характер и которые, в случае обнаружения противоречий, приходится исключать. В чистой логике непротиворечивость аксиом обосновывается, а каждая теорема ***просто доказуема***, то есть не зависит ни от каких условий.

Ясно, что рамсеевская классификация парадоксов не делает различия между чистой и прикладной логикой. Это позволяет, как бы перекладывать все беды, связанные с парадоксами (а они-то как раз в допущениях нелогического порядка) на какой-то таинственный противоречивый характер нашего мышления вообще и позволяет, тем самым, говорить недоброжелателям о «кризисе логики».

---

[35] См.: Новая философская энциклопедия. Т. 3. М., 2001, ст. «Парадокс логический» и «Парадоксы семантические».

[36] *Карри Х.* Основания математической логики. М., 1969. С. 18-19.

[37] *Нагель Э., Ньюмен Д.* Теорема Гёделя... С. 7.

Ниже я привожу иную классификацию парадоксов, которая более детально обращает наше внимание на особенности допущений (и принципов) весьма общего порядка, способных проявиться в основе того или иного парадокса. Ни одно из этих допущений, как будет видно, не является чисто логическим. Но многие из них действительно имеют отношение к мышлению.

Эта классификация должна была появиться как заключительная часть статьи «Парадокс», написанной А.С.Есениным-Вольпиным в 1965-ом году для Философской энциклопедии. По техническим причинам эту часть его статьи мне (в то время редактору энциклопедии) пришлось исключить. Теперь я воспроизвожу её (с незначительными поправками) по гранкам тридцатилетней давности, сохранившимся в моём архиве:

«Классифицируя парадоксы, положив в основу виды тех допущений, которые к ним приводят, можно, при всей условности этой классификации, указать следующие важнейшие виды: 1) ***парадоксы, связанные с математической индукцией*** (парадокс кучи, космологические парадоксы; сюда же можно отнести парадокс Хао-Вана, связанный с неоднозначностью натурального ряда в аксиоматической теории множеств и формализуемостью доказательств непротиворечивости); 2) ***парадоксы релевантности*** (то есть те, в основе которых лежит допущение о возможности игнорировать подробности смысловых связей); с этими парадоксами связаны и парадоксы математической индукции, так как попытки освободиться от этих парадоксов основаны на математической индукции; 3) ***парадоксы отождествлений*** (в основе которых лежит допущение о независимости тождества от отождествлений); они также связаны с парадоксами математической индукции и парадоксами актива-пассива; 4) ***семантические парадоксы*** (основанные на допущении об осмысленности отношения обозначения); 5) ***теоретико-множественные парадоксы*** (сводимые к предыдущим); 6) ***парадоксы актива-пассива*** (отождествление происходящего с производимым и т.п.; к ним относятся парадоксы о необходимости начала мира, антиномии Канта); кроме того, из-за парадоксов актива-пассива возникают парадоксы отождествлений, а также следующие группы парадоксов: 7) ***парадоксы модальностей***, которые допускают дальнейшую классификацию: отождествление возможного с действительным, ошибка смещения целей (приводящая к тому, что достаточное считается необходимым и т.п.); пренебрежение условиями возможности (что связано с парадоксами релевантности и приводит к смешению возможности с действительностью); парадокс «утренняя звезда»; 8) ***парадоксы из-за смешения интуитивных понятий с чётко определёнными*** (они родственны семантическим парадоксам).

Классификация парадоксов тесно связана с классификацией логических ошибок, лежащих в основе парадоксов. Встреча с парадоксами всегда настораживает, хотя бывали случаи, когда парадоксы ошибочно принимались за правильные доказательства противоречия.

Слово «парадокс» употребляется иногда и шире — для обозначения рассуждения, приводящего к результатам, противоречащим принятым мнениям. Это значение слова «парадокс» связано с предыдущим, так как парадокс в этом смысле, взятый с этими мнениями, образует парадокс в смысле противоречия. Но парадокс в широком смысле слова не обязательно обнаруживает порочность рассуждения, вызванного этим мнением, так как возможно, что именно принятые мнения должны быть отвергнуты (примерно этого типа парадоксом можно считать парадокс Скулема)».

Замечу, что эта классификация, как и любая другая, не является исчерпывающей. К примеру, в ней не используется понятие абстракции неразличимости и связанное с ним понятие о ***парадоксах транзитивности***. Однако эта классификация яснее, чем рамсеевская, показывает тонкую структуру явлений, лежащих в основе рассуждений, приводящих к парадоксам самого разного порядка, как, равным образам, и их перекрёстную связь.

Resume

Part Two of the «Logic of Abstraction» continues an interval analysis of the abstract work of the mind in both the applied and theoretical fields of knowledge. The emphasis, however, is transferred from the general issues of the formation and meaning of abstractions, discussed in Part One, to the problems of developing the logical models of the latter. The author believes that it is the logical analysis that can ensure the necessary completeness of specification and identification of these abstractions and the related terminology. In particular, the classical problem of the logical meaning of relationships between identity and indiscemibility is discussed in detail for this purpose. The author presents a formulation of the ***logic of indiscernibilities*** (as a relational system of PB-algebras), which, in Ms opinion, would allow to specify the underlying semantics of the said relationships, separating the ***«punctiform»*** meaning of identity (related to the abstractions of individuation and constancy) from the *interval* meaning of indiscernibility (related to the abstraction of indiscernibility and uncertainty of empirical descriptions). The author's analysis results in the conclusion that in the real process of cognition any scaling used for comparison and measurement of the objects under observation occurs within a logarithmic scale, of which the ends are absolute equality (logical identity) and absolute indiscernibility - both, in fact, unattainable. In a sense, this justifies Poincare's hypothesis of a «discontinuity jump» (le point de saut) between theory and experience, of «jumping over the abyss» we have to do on our way from empirical data to theoretical generalisations. The book also discusses some fundamental issues of logic and mathematics.

Оглавление

Научное издание

Новосёлов Михаил Михайлович

Логика абстракций (методологический анализ). Часть вторая

Утверждено к печати Ученым советом
Института философии РАН

В авторской редакции
Художник *В.К.Кузнецов*
Технический редактор *А.В.Сафонова*
Корректура автора

Лицензия ЛР № 020831 от 12.10.98 г.

Подписано в печать с оригинал-макета 16.01.03.
Формат 60x84 1/16. Печать офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 9,93. Уч.-изд. л. 8,34. Тираж 500 экз. Заказ № 003.

Оригинал-макет изготовлен в Институте философии РАН
Компьютерный набор автора
Компьютерная верстка: *Ю.А.Аношина*

Отпечатано в ЦОП Института философии РАН
119992, Москва, Волхонка, 14